



**Filipe de Oliveira Raposo**

Licenciado em Ciências de Engenharia Mecânica

## **Análise Dinâmica de Vigas Curvas Desenvolvimento de um Programa Computacional**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em  
Engenharia Mecânica

Orientador:

Doutor António Paulo Vale Urgueira, Professor Associado,  
Faculdade de Ciências e Tecnologias  
Universidade Nova de Lisboa

**Júri:**

Presidente: António José Freire Mourão, Professor Associado da *FCT-UNL*

Arguente: Júlio Martins Montalvão e Silva, Professor Catedrático do *IST*

Vogal: António Paulo Vale Urgueira, Professor Associado da *FCT-UNL*



FACULDADE DE  
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

**Setembro 2018**



**Filipe de Oliveira Raposo**

Licenciado em Ciências de Engenharia Mecânica

**Análise Dinâmica de Vigas Curvas**  
**Desenvolvimento de um Programa Computacional**

Dissertação para Obtenção do Grau de Mestre em Engenharia Mecânica

Orientador:

Doutor António Paulo Vale Urgueira

Professor Associado

Faculdade de Ciências e Tecnologia Universidade Nova de Lisboa

**Setembro de 2018**



# **Análise Dinâmica de Vigas Curvas**

## **Desenvolvimento de um Programa Computacional**

Copyright © Filipe de Oliveira Raposo, Faculdade de Ciências e Tecnologia

Universidade Nova de Lisboa

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objectivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.



# Agradecimentos

Um grande agradecimento ao Prof. Dr. António Paulo Vale Urgueira, orientador de todo o trabalho que compõe esta dissertação, pelo privilégio de ser guiado com experientes e sábios conselhos assistidos de uma humilde liderança de exemplar carácter. A sua supervisão ajudou a dar direcção e sentido no caminho ao êxito do trabalho realizado, nunca faltando a sua presença junta de um grande espírito de cooperação e de tolerância, aliado à boa disposição.

Uma outra palavra de reconhecimento pela confiança que em mim foi depositada para me deixar ao cuidado de um trabalho que outrora fora seu tema de dissertação de mestrado, para o poder elevar para patamares superiores, dando me essa oportunidade de participar na inovação deste complexo tema das vigas curvas.

Uma palavra de agradecimento ao Prof. Dr. João Mário Burguete Botelho Cardoso pela prestável ajuda dada com alguns imprevistos encontrados no âmbito da simulação numérica, e ao Prof. Dr. Tiago Alexandre Narciso da Silva pela sua disposição, sempre que houvesse necessidade da minha parte.

E por último, uma palavra de obrigado, pela boa formação dada nas disciplinas da área de mecânica estrutural e aos outros Professores que contribuíram por essa mesma boa formação dada em outras áreas.

Sem nunca esquecer, uma palavra não menos importante, de eterna gratidão à minha família que sempre foi o suporte não só neste tema, mas sim em todo o percurso académico pelo apoio financeiro e emocional, onde estão incluídos todos os amigos, agradecendo também a colegas e conhecidos que deram o seu contributo directo/indirecto na construção do trabalho e no meu desenvolvimento pessoal e intelectual em todo o meu percurso académico.





# Sumário

No presente trabalho é desenvolvido um modelo computacional de análise dinâmica de vigas curvas planas de secção transversal e raio de curvatura constantes, baseado na solução exacta das equações diferenciais de equilíbrio dinâmico de um modelo analítico de viga curva quando sujeita a vibrações forçadas do tipo harmónico, dentro e fora do seu plano de curvatura com a condição livre-livre.

Os parâmetros de entrada do modelo desenvolvido estão relacionados com a geometria da viga, propriedades materiais, tipo de movimento em estudo, consideração da deformação devida ao esforço transversal e/ou inércia rotatória, gama de frequências, entre outros. O tipo de resultado de saída é disponibilizado na forma de resposta em frequência de uma viga curva de parâmetros fixos ou uma representação das quatro primeiras frequências naturais quando o ângulo de abertura se vai alterando, desde uma posição próxima de viga recta, até à posição de anel aberto.

A validade do modelo computacional foi testada através da comparação de resultados experimentais previamente publicados em literatura especializada e também, comparando com resultados obtidos neste trabalho via simulação numérica recorrendo ao método dos elementos finitos havendo sido desenvolvido outro código adaptado a esta simulação numérica de vigas curvas.

---

**Palavras-Chave:** Viga Curva, Modelo Computacional; Frequência Natural; Matriz Receptância; Função Resposta em Frequência; Modos de Vibração;



# Abstract

In the present study it is developed a computational model for the dynamic analysis of plane curved beams with constant transversal section and curve radius, based on the exact solution of the differential equilibrium equations of a beam element, this model allows the estimation of the forced harmonic motion, both in plane and out of plane of curvature of a free-free support condition.

The input data of the model is the geometry section of the beam, material properties, type of motion, consideration of the shear stiffness and/or rotatory inertia effects. The output result is possible in a frequency response of a fixed parameter curved beam or a plot representation of the first four natural frequencies for an opening angle range, from an approximated straight beam to closed opened ring.

The validation of the model was made by testing experimental data previously published in specialized literature, and also comparing with numeric simulation via finite element method.

---

**Keywords:** Curved Beam, Computational Model; Natural Frequency; Receptance Matrix; Frequency Response Function; Vibration Modes;





# Índice

<b>CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1 Motivação	2
1.2 Objectivos	2
1.3 Estrutura da Dissertação	3
1.4 Revisão Bibliográfica	4
<b>CAPÍTULO 2 ANÁLISE TEÓRICA</b>	<b>7</b>
2.1 Esforços e Equações de Equilíbrio	10
2.1.1 Movimento Dentro do Plano	10
2.1.2 Movimento Fora do Plano	11
2.2 Solução	12
2.3 Matrizes $[At]$ e $[Bt]$	14
2.4 Matrizes Rigidez Dinâmica e Receptância	15
2.5 Compreensão Geral	16
<b>CAPÍTULO 3 MODELO COMPUTACIONAL ANALÍTICO</b>	<b>17</b>
Introdução	17
3.1 Validação Modelo – Estudo Tipo 1	20
3.1.1 Selecção dos Casos de Referência	20
3.1.2 Validação Via Experimental	22
3.1.2.1 Discussão de Resultados	25
3.1.4 Validação Via Numérica M.E.F.	27
3.1.4.1 Discussão de Resultados	34
3.2 Validação Modelo - Estudo Tipo 2	35
3.2.1 Família de Modos - Dentro do Plano	36
3.2.2 Família de Modos - Fora do Plano	38
3.2.3 Convergência - Modelo Viga Recta	40
3.2.3.1 Discussão de Resultados	46
3.3 Validação Via <i>M.E.F</i> dos Ângulos $\alpha$ de Referência	48
Viga com Ângulo de Abertura 270 Graus	50
Viga com Ângulo de Abertura 180 Graus	51
Viga com Ângulo de Abertura 60 Graus	52
Viga com Ângulo de Abertura 10 Graus	53
Discussão de Resultados	54

3.3.1 Vectores Modais – Movimento Fora do Plano .....	55
Vectores Modais – Componente $\mathcal{V}$ .....	56
Vectores Modais – Componente $\phi_X$ .....	58
Vectores Modais – Componente $\phi_Z$ .....	60
Discussão de Resultados.....	62
3.4 Erros no Modelo Computacional e Simulação <i>M.E.F</i> .....	64
<b>CAPÍTULO 4 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS</b> .....	67
4.1 Conclusões .....	67
4.2 Sugestões para Trabalhos Futuros.....	69
Bibliografia.....	70





# Índice de Figuras

FIG. 1 – PARÂMETROS DA VIGA CURVA.....	7
FIG. 2 – IDENTIFICAÇÃO DO PLANO DE CURVATURA.....	7
FIG. 3 – CLASSIFICAÇÃO DE MOVIMENTOS DA VIGA CURVA.....	9
FIG. 4 – MOV. DENTRO PLANO - GRAUS DE LIBERDADE E ESFORÇOS .....	10
FIG. 5 – MOV. FORA PLANO - GRAUS DE LIBERDADE E ESFORÇOS.....	11
FIG.6 – MATRIZ $[A(\theta)]$ E $[B(\theta)]$ PARA MOV. DENTRO DO PLANO .....	14
FIG. 7 -- MATRIZ $[A(\theta)]$ E $[B(\theta)]$ PARA MOV. FORA DO PLANO .....	14
FIG. 8 – ETAPAS DE CÁLCULO DA RESPOSTA.....	16
FIG. 9 – RELAÇÃO ENTRE DESLOCAMENTOS E ESFORÇOS PARA OS TERMOS DA MATRIZ RECEPTÂNCIA .....	16
FIG. 10 – FLUXOGRAMA.....	18
FIG. 11 – VIGAS REFERÊNCIA SECÇÃO RECTANGULAR .....	20
FIG. 12 – VIGA REFERÊNCIA SECÇÃO CIRCULAR.....	20
FIG. 13 – RESULTADOS ESTUDO TIPO 1 - VIGA1 .....	22
FIG. 14 – RESULTADOS ESTUDO TIPO 1 - VIGA2 .....	23
FIG. 15 – RESULTADOS ESTUDO TIPO 1 - VIGA3 .....	24
FIG. 16 – MODELAÇÃO DA VIGA 1 .....	29
FIG. 17 – MODELAÇÃO DA VIGA 2 .....	31
FIG. 18 – MODELAÇÃO VIGA 3 .....	33
FIG. 19 – VIGAS COM DIFERENTES ÂNGULOS DE ABERTURA.....	35
FIG. 20 – RESULTADO ESTUDO TIPO 2 MOV. DENTRO DO PLANO.....	36
FIG. 21 – RESULTADO ESTUDO TIPO 2 SOBREPOSIÇÃO DO EFEITO $\varepsilon_Z \neq 0$ E $\varepsilon_Z = 0$ .....	37
FIG. 22 – RESULTADO ESTUDO TIPO 2 MOV. FORA DO PLANO.....	38
FIG. 23 – COMPARAÇÃO ENTRE MODELOS ANALÍTICOS.....	39
FIG. 24 – MOV. FORA E DENTRO DO PLANO DE UMA VIGA APROXIMADAMENTE RECTA (SECÇÃO CIRCULAR) .....	41
FIG. 25 – MOV. FORA E DENTRO DO PLANO DE UMA VIGA APROXIMADAMENTE RECTA (SECÇÃO RECTANGULAR).....	41
FIG. 26 – CONVERGÊNCIA PARA MODELO VIGA RECTA .....	42
FIG. 27 – CONVERGÊNCIA PARA MODELO TEÓRICO VIGA RECTA.....	44
FIG. 28 – MALHA APLICADA A VIGA COM $\alpha = 270^\circ$ .....	50
FIG. 29 – MALHA APLICADA A VIGA COM $\alpha = 180^\circ$ .....	51
FIG. 30 – MALHA APLICADA A VIGA COM $\alpha = 60^\circ$ .....	52
FIG. 31 – MALHA APLICADA A VIGA COM $\alpha = 10^\circ$ .....	53
FIG. 32 – FAMÍLIA DE MODOS-VECTORES MODAIS $\nu$ .....	56
FIG. 33 – FAMÍLIA DE MODOS-VECTORES MODAIS $\phi_X$ .....	58
FIG. 34 – FAMÍLIA DE MODOS-VECTORES MODAIS $\phi_Z$ .....	60
FIG. 35 – MOVIMENTO DAS EXTREMIDADES PARA FREQUÊNCIAS NATURAIS PARES OU ÍMPARES.....	63

# Índice de Tabelas

TABELA 1 – DADOS PRINCIPAIS DO PROGRAMA .....	21
TABELA 2 – COMPARAÇÃO DE RESULTADOS VIA EXPERIMENTAL – VIGA 1 DENTRO E FORA DO PLANO.....	22
TABELA 3 – COMPARAÇÃO DE RESULTADOS VIA EXPERIMENTAL – VIGA 2 DENTRO E FORA DO PLANO.....	23
TABELA 4 – COMPARAÇÃO DE RESULTADOS VIA EXPERIMENTAL – VIGA 1 DENTRO E FORA DO PLANO.....	24
TABELA 5 – RESULTADOS VIA <i>MEF</i> E MODELO COMPUTACIONAL – DENTRO PLANO VIGA 1 .....	28
TABELA 6 – RESULTADOS VIA <i>MEF</i> E MODELO COMPUTACIONAL – FORA PLANO VIGA 1.....	28
TABELA 7 – RESULTADOS VIA <i>MEF</i> E MODELO COMPUTACIONAL – DENTRO PLANO VIGA 2 .....	30
TABELA 8 – RESULTADOS VIA <i>MEF</i> E MODELO COMPUTACIONAL – FORA PLANO VIGA 2.....	30
TABELA 9 – RESULTADOS VIA <i>MEF</i> E MODELO COMPUTACIONAL – DENTRO PLANO VIGA 3 .....	32
TABELA 10 – RESULTADOS VIA <i>MEF</i> E MODELO COMPUTACIONAL – FORA PLANO VIGA 3.....	32
TABELA 11 – RESULTADOS MODELO COMP. COM $\alpha \approx 0$ – RESULTADOS TEÓRICOS VIGA RECTA.....	42
TABELA 12 – RESULTADOS MODELO COMP. COM $\alpha \approx 0$ – RESULTADOS TEÓRICOS VIGA RECTA.....	44
TABELA 13 – VALORES COMPUTACIONAIS MOV. DENTRO DO PLANO-4ª FN.....	45
TABELA 14 – FREQUÊNCIAS NATURAIS DENTRO E FORA DO PLANO PARA 4 ÂNGULOS DE ABERTURA.....	49
TABELA 15 – COMPARAÇÃO VALORES VIA <i>MEF</i> COM MODELO COMPUTACIONAL $\alpha = 270^\circ$ .....	50
TABELA 16 – COMPARAÇÃO VALORES VIA <i>MEF</i> COM MODELO COMPUTACIONAL $\alpha = 180^\circ$ .....	51
TABELA 17 – COMPARAÇÃO VALORES VIA <i>MEF</i> COM MODELO COMPUTACIONAL $\alpha = 60^\circ$ .....	52
TABELA 18 – COMPARAÇÃO VALORES VIA <i>MEF</i> COM MODELO COMPUTACIONAL $\alpha = 10^\circ$ .....	53

# Nomenclatura

## Simbologia e Notação

$A_4, A_2, A_0$	- Coeficientes da equação característica
$A$	- Área da secção transversal
$A(\theta)$	- Matriz que relaciona os deslocamentos de qualquer ponto da linha central com as constantes de integração
$[A_t]$	- Matriz que relaciona os deslocamentos na extremidade e o vector $\{X\}$
$B(\theta)$	- Matriz que relaciona os esforços em qualquer ponto da viga com o vector $\{X\}$
$[B_t]$	- Matriz que relaciona os esforços nas extremidades com o vector $\{X\}$
$c_n \ (n=1,2,...,6)$	- Constantes de integração (elementos do vector $\{X\}$ )
$E$	- Módulo de elasticidade longitudinal ( <i>Young</i> )
$\{F\}$	- Vector de forças generalizadas nas extremidades
$G$	- Módulo de elasticidade transversal
$h$	- Espessura radial
$I_x, I_y$	- Segundos momentos de área em relação aos eixos $x$ e $y$
$J_z$	- Momento polar de inércia da secção transversal
$L$	- Comprimento da linha central
$[K_d]$	- Matriz rigidez dinâmica
$M_x, M_y, M_z$	- Momentos de flexão segundo $x$ , $y$ e de torção segundo $z$
$\tilde{M}_x(\theta), \tilde{M}_y(\theta), \tilde{M}_z(\theta)$	- Amplitudes modais de $M_x, M_y$ e $M_z$
$M_{x0}, M_{y0}, M_{z0}$	- Amplitude modal de $M_x, M_y, M_z$ para a extremidade $\theta=0$
$M_{x\alpha}, M_{y\alpha}, M_{z\alpha}$	- Amplitude modal de $M_x, M_y, M_z$ para a extremidade $\theta=\alpha$
$N$	- Esforço normal

$\tilde{N}(\theta)$	- Amplitude modal de $N$
$N_0$	- Amplitude modal de $N$ para a extremidade $\theta = 0$
$N_\alpha$	- Amplitude modal de $N$ para a extremidade $\theta = \alpha$
$\{P\}$	- Vector de forças nas extremidades
$[Q]$	- Matriz de transformação de $\{P\}$ em $\{F\}$
$R$	- Raio da linha central
$[R_t]$	- Matriz receptância ou flexibilidade dinâmica
$u, v, w$	- Deslocamentos de um ponto da linha central segundo os eixos $x, y, z$
$u_0, v_0, w_0$	- Amplitude modal de $u, v, w$ para a extremidade $\theta = 0$
$u_\alpha, v_\alpha, w_\alpha$	- Amplitude modal de $u, v, w$ para extremidade $\theta = \alpha$
$R_{t(i,j)}(\omega)$	- Termo da matriz receptância
$V_x, V_y$	- Esforço transversal nas direcções $x$ e $y$
$\tilde{V}_x(\theta), \tilde{V}_y(\theta)$	- Amplitudes modais de $V_x$ e $V_y$
$V_{x0}, V_{y0}$	- Amplitudes modais de $V_x$ e $V_y$ para a extremidade $\theta = 0$
$V_{x\alpha}, V_{y\alpha}$	- Amplitudes modais de $V_x$ e $V_y$ para a extremidade $\theta = \alpha$
$\{X\}$	- Vector de constantes de integração
$Oxyz$	- Sistema de eixos local com origem no centróide da secção
$\alpha$	- Ângulo de abertura da viga curva
$\{\delta\}$	- Vector dos deslocamentos generalizados dos centróides nas secções extremas
$\Delta$	- Discriminante da equação cúbica auxiliar (forma Cardan)
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	- Extensões da linha central segundo os eixos $x, y, z$
$\lambda_n \ (n=1,2,...,6)$	- Raízes da equação diferencial de equilíbrio
$\nu$	- Coeficiente de Poisson
$\rho$	- Massa específica

$\phi_X, \phi_Y, \phi_Z$	- Rotações associadas ao sistema de eixos local
$\Phi_x(\theta), \Phi_y(\theta), \Phi_z(\theta)$	- Amplitudes modais de $\phi_X, \phi_Y, \phi_Z$
$\phi_{X0}, \phi_{Y0}, \phi_{Z0}$	- Amplitudes modais de $\phi_X, \phi_Y, \phi_Z$ para a extremidade $\theta = 0$
$\phi_{X\alpha}, \phi_{Y\alpha}, \phi_{Z\alpha}$	- Amplitudes modais de $\phi_X, \phi_Y, \phi_Z$ para a extremidade $\theta = \alpha$
$\omega$	- Frequência de excitação
$\omega_{DELAY}$	- Passo da frequência de excitação
$\omega_{FINAL}$	- Frequência de excitação final
$\omega_{INICIAL}$	- Frequência de excitação inicial
$\omega_n$	- Frequência natural
$\Pi, \Gamma$	- Constantes para o cálculo do discriminante
[ ]	- Símbolo de matriz ; Indicação de referência

# Abreviaturas

$Alt$	- Altura da secção transversal
$ARi$ ( $i = 1, 2, \dots, 5$ )	- Anti-ressonância
$Dn$ ( $n = 1, 2, 3, 4$ )	- Frequências naturais do movimento dentro do plano
$Esp$	- Espessura radial da secção transversal
$Fn$ ( $n = 1, 2, 3, 4$ )	- Frequências naturais do movimento fora do plano
$FRF$	- Função resposta em frequência
FN	- Frequência natural
GL	- Grau(s) de liberdade
IR	- Efeito de inércia rotatória
IS	- Efeito de deformação devida ao esforço transversal
LC	- Linha central
$MEF$	- Método dos elementos finitos
$Ri$ ( $i = 1, 2, \dots, 5$ )	- Ressonâncias
$TXT$	- Extensão de nome do ficheiro







---

# Capítulo 1

## Introdução

As vibrações mecânicas pertencem à área da Mecânica Estrutural onde a física, a matemática, e a experiência em engenharia se cruzam de modo interactivo constituindo assim um triângulo de conhecimentos.

A evolução de modelos analíticos obriga por vezes a grandes exigências de cálculo no sentido de os fenómenos serem retratados com maior realismo, rigor e precisão, o que está sempre inerente a um recurso precioso: o tempo.

O nascimento do computador abriu um novo meio de estudo onde os trabalhos/problemas/estudos são transportados para o contexto computacional, passando o referido triângulo de conhecimentos da aplicação humana para a aplicação computacional.

Dada a exigência de cálculo necessária a certos modelos, torna-se incomportável a aplicação do processamento humano face ao tempo despendido. E assim, esta nova era da tecnologia de computação faz nascer o presente estudo na medida em que é criado um modelo computacional analítico de análise dinâmica de vigas curvas cuja resposta é dada graficamente na forma de receptância. Modelo o qual é validado pela comparação de resultados obtidos com métodos numéricos, não deixando de parte também a comparação clássica com resultados experimentais.

Existe portanto, um modelo computacional que foi comparado com resultados experimentais e comparado com resultados simulados numericamente, fruto de um outro código desenvolvido separadamente noutra linguagem, propositadamente para gerar esses valores através do método dos elementos finitos.

## 1.1 Motivação

O tema de análise dinâmica de vigas curvas é um tema delicado que envolve complexas equações no cálculo da sua função de resposta em frequência (*FRF*). Posta esta complexidade, é uma grande valia mudar o paradigma deste tema para um âmbito computacional onde já houve trabalho desenvolvido anteriormente. O desenvolvimento deste tema baseia-se numa filosofia de modernizar um modelo analítico, implementando-o computacionalmente aumentando a eficiência de estudos pela via computacional. Estando esta via computacional em expansão nos trabalhos recentes em engenharia, assegura-se que neste trabalho seja dada a conhecer uma via além da analítica e experimental, a via numérica de simulação que pode constituir um terceiro alicerce na obtenção de resultados para validação do modelo computacional desenvolvido.

## 1.2 Objectivos

O objectivo do presente tema é o desenvolvimento de um Modelo Computacional que calcule a função de resposta em frequência de uma viga curva sendo esta representada numa forma gráfica e que permita uma visualização directa das frequências de ressonância e que com estas, seja possível a construção das curvas que contêm as primeiras quatro frequências naturais para uma dada viga em função do seu ângulo de abertura.

Sendo um dos objectivos do trabalho a validação do modelo desenvolvido, tal foi feito através da via clássica experimental e também através de uma nova via que está a ganhar relevo em trabalhos modernos, a via numérica através de simulações abrindo aqui um novo caminho de exploração.

## 1.3 Estrutura da Dissertação

A presente dissertação está estruturada por capítulos onde estão contidas as secções que organizam as abordagens a temas referentes ao capítulo em questão. A ordem dos capítulos e as suas secções, têm um seguimento lógico no sentido de dar um entendimento mais facilitado ao leitor.

**Capítulo 1** – Introdução – Neste capítulo, como sugere o seu título, é feita uma introdução geral ao trabalho realizado seguida da motivação que levou à sua realização bem como os objectivos propostos. A estrutura da dissertação, que se encontra na presente página, antecede a Revisão Bibliográfica que expõe alguns trabalhos similares realizados e até mesmo o trabalho base desta dissertação.

**Capítulo 2** – Análise Teórica – Este capítulo aborda a componente teórica do modelo analítico que fundamenta o programa computacional criado. A Análise Teórica é feita de forma breve iniciando-se com a apresentação dos Parâmetros Gerais que caracterizam a viga curva aqui definida, assim como os Esforços e Equações de Equilíbrio dos tipos de movimento que compõem o movimento geral de uma viga curva. Uma vez apresentadas as equações, é mostrada a Solução de onde calculam as Matrizes [A] e [B] das quais se obtém a Matriz de Receptância.

**Capítulo 3** – Análise Dinâmica de Vigas Curvas Modelo Computacional – Este extenso capítulo explica inicialmente em Introdução o funcionamento do programa na forma de fluxograma. Tratando-se este capítulo do programa desenvolvido, será feita uma abordagem dos dois tipos de *output* que dele podem resultar, mas separadamente em Estudo Tipo 1 e Estudo Tipo 2 e as suas validações. Para o Estudo Tipo 1 o que dele resulta é uma ou várias *FRF* de uma viga curva com certas propriedades e a sua validação é feita através de valores experimentais e numéricos, fazendo-se surgir uma novidade neste estudo face ao trabalho anterior, o estudo via simulação numérica recorrendo ao *MEF*. Para o Estudo Tipo 2 o que dele resulta são as várias *FRF* de uma viga curva para vários ângulos de abertura e um registo das quatro primeiras frequências naturais para cada ângulo para a gama especificada, o que, no limite, resulta em quatro curvas que partem de uma viga recta até um anel circular aberto. Este segundo tipo de estudo devolve resultados mais complexos, os quais serão apresentados primeiramente de uma forma breve sendo feita a validação através da convergência para o modelo de viga recta. Com o avançar das validações, o estudo será cada vez mais pormenorizado, gerando-se assim resultados via *MEF* para situações particulares. Este uso da simulação numérica culmina no estudo dos modos de vibração através da análise dos vectores modais associados às várias componentes do movimento fora do plano, o que experimentalmente seria complicado.

## 1.4 Revisão Bibliográfica

Ao longo do tempo, tem sido referido em imensos trabalhos que tratam o estudo dinâmico de vigas curvas e anéis, o nome de Von Hoppe [1] pois foi o investigador com as mais antigas, se não a mais antiga publicação sobre este tema, que em 1871 deduziu a expressão que permite obter valores de frequências naturais de anéis circulares finos, dentro do plano, desprezando a extensão da linha central e os efeitos do esforço transversal e da inércia rotatória.

Anos mais tarde, Augustus Love [2] desenvolveu uma teoria notável sobre a elasticidade no seu livro publicado em 1944 que permitiu o conhecimento dos valores de frequências naturais para anéis finos circulares, aplicável a ambos os tipos de movimento, dentro e fora do plano de curvatura.

Os autores Blüthner Seidel e Arthur Erdélyi [3] tentaram em 1964, solucionar a recorrente questão da negligência dos referidos efeitos para o movimento dentro do plano de anéis circulares contabilizando as energias associadas à flexão, ao esforço transversal, à translação e rotação de anéis, havendo sido posteriormente, feita a simplificação de não incluir a energia associada à extensão da linha central devido à falta de meios computacionais potentes como os desta era recente.

Singiresu Rao e Sundararajan [4] obtiveram uma equação de equilíbrio dinâmico no plano de curvatura do anel, levando em conta os efeitos da deformação devida ao esforço transversal e a inércia rotatória, fazendo o estudo em separado da inclusão de um efeito e o outro, concluindo que a deformação devida ao esforço transversal teria uma predominância em relação à inércia rotatória levando a uma maior proximidade com os valores experimentais. Alguns autores investigaram as vibrações em anéis circulares mas sem este passo dado, revelando-se este trabalho feito em 1969 uma grande valia na área dos anéis circulares.

Era um facto de que havia teorias que suportavam o cálculo de frequências naturais para anéis circulares havendo posteriormente autores que calcularam frequências naturais em condições de fronteira no movimento dentro e fora do plano, mas vulgarmente colocando de parte os efeitos mencionados.

Stephen Timoshenko [5] deixou o seu grande marco em 1921, ao demonstrar que os desvios causados pela não consideração da deformação devida ao esforço transversal em vigas rectas, poderiam ser tremendos, incorrendo-se em grandes erros no cálculo de frequências naturais, neste caso.

Wang Laskey e Ahmad [6] em 1984, recorreram a um processo analítico para obtenção da matriz rigidez dinâmica de uma viga curva fora do plano referindo a contabilização dos efeitos de inércia rotatória e deformação devida ao esforço transversal. Contudo, a inclusão da inércia rotatória não é completa uma vez que este termo, associado à rotação (torção) da secção, é desprezado nas equações de equilíbrio, como mostraram Silva e Urgueira [8].

Nesse sentido foi desenvolvido por Urgueira o estudo [7] que suporta o presente trabalho, tratando do desenvolvimento de um modelo analítico de análise dinâmica de vigas curvas circulares de secção constante, através da solução exacta das equações diferenciais, que contempla os movimentos dentro e fora do plano incluindo a deformação devida ao esforço transversal e a inércia rotatória e ainda a extensão da linha central axialmente no caso do primeiro tipo de movimento referido.

Posteriormente em 1987, Silva e Urgueira publicaram um trabalho [8] onde foi feito o confronto entre o modelo de Wang para o movimento fora do plano aplicado a uma viga de referência, que foi comparado pelos referidos autores que incluíram o termo responsável pela rotação da secção. Estes autores impulsionaram o tema para a questão de como seriam as curvas que contêm as frequências naturais em função do ângulo de abertura para uma viga de comprimento constante tendo feito a sua representação.

Alguns anos mais tarde em 1998, Ekrem Tufekçi e Arpacı [9] determinaram também a solução exacta de equações diferenciais para vibrações livres de arcos para movimentos dentro do plano, estudando particularmente várias condições fronteiras aplicadas a este movimento comparando as frequências naturais obtidas com e sem a presença da deformação devida ao esforço transversal, inércia rotatória e extensão da linha central.

Posteriormente o mesmo investigador Tufekçi elaborou outro trabalho com Dogruer [10] em 2002, cuja solução exacta é determinada então para vibrações livres mas para fora do plano, em particular para uma viga curva de secção rectangular. Neste trabalho os efeitos da deformação devida ao esforço transversal e da inércia rotatória são contabilizados neste movimento, sendo a solução determinada através do método dos valores iniciais não dependendo das condições fronteira. Eles usaram os dados experimentais e a mesma referência de viga em [7] fazendo uma comparação geral entre o seu modelo, o de Wang [6] e o de Urgueira [7] tendo a referência experimental deste último.

A partir dessas equações do movimento para arcos, seguiu-se o estudo [11] em 2006, de vibrações de vigas curvas nas condições livre-livre, livre-encastada e encastada. Para as três condições referidas, foram determinadas as quatro primeiras frequências naturais com a presença dos efeitos da deformação devida ao esforço transversal e da inércia rotatória. Ekrem Tufekçi quis verificar experimentalmente as soluções numéricas e analíticas de vibrações livres de vigas curvas dentro e fora do plano. Esta verificação foi feita para três vigas diferentes, começando numa viga curva circular de secção rectangular constante, outra de igual secção mas parabólica (não circular) e uma última mais complexa de secção também rectangular mas variável com o seu comprimento usando o método dos elementos finitos no estudo dessas três vigas e foi o que aconteceu usando o autor o *ANSYS* para o pré-processamento, solução e pós-processamento dos elementos no estudo das frequências naturais para cinco tipos de condições fronteira comparando-se os resultados com os que alguns investigadores haviam determinado

Tufekçi sublinhou que a complexidade era imensa quando se pretendia resolver as equações das vibrações livres tendo em conta todos os efeitos mencionados no mesmo cálculo analítico sendo portanto, a negligência desses efeitos era uma simplificação ainda considerável usando os métodos de Ritz e Galerkin. A conclusão tirada nesse trabalho era que o método dos elementos finitos já era uma ferramenta sólida no cálculo de frequências naturais para diversos tipos de condições fronteira dando resultados de baixos erros notando-se desvios mais crescentes para o movimento fora do plano em particular.

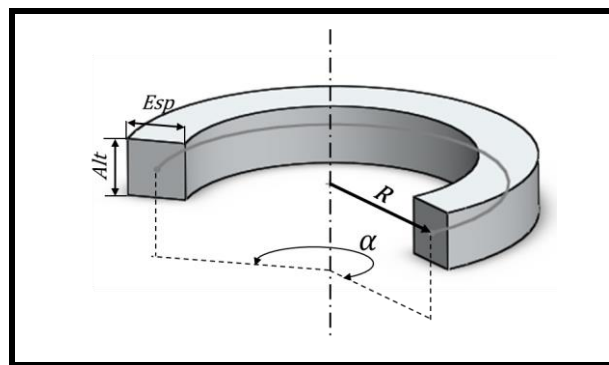
Denominando-se como família de modos as curvas que contêm as referidas frequências de ressonância que apresentam características idênticas de modos em termos de simetria, estas famílias de modos não foram alvo de estudo por parte dos investigadores segundo a pesquisa bibliográfica realizada, sendo a mais recente referência a do trabalho [8] em 1988, possivelmente devido à enorme complexidade que é realizar humanamente o cálculo analítico das respostas em frequência para um dado ângulo de abertura, acrescido da pesquisa dos pontos de ressonância, repetindo-se este ciclo dezenas de vezes para se ter uma representação razoável das curvas que contêm as famílias de modos.

Portanto, a implementação computacional desse estudo sobre as famílias de modos no trabalho aqui realizado, permitirá explorar uma imensidade de comportamentos modais de uma viga com a sua curvatura, permitindo com rigor confirmar ou até contestar também, os resultados do trabalho [8], como será brevemente apresentado.

# Capítulo 2

## Análise Teórica

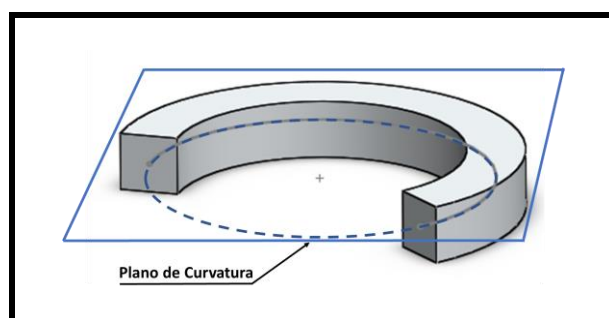
A viga é definida geralmente como elemento estrutural alongado<sup>1</sup> gerado pela sua secção transversal, destinado a aplicação de cargas. Neste âmbito, a viga curva é caracterizada pela sua secção com altura  $Alt$  e espessura radial  $Esp$  e raio  $R$  de curvatura constante ao longo do seu ângulo de abertura  $\alpha$ , como pelo material homogéneo que une as duas extremidades.



**Fig. 1 – Parâmetros da viga curva**

Consideremos uma viga curva, cuja linha central une os centróides de todas as secções transversais, está contida num plano designado Plano de Curvatura, se encontra representada na seguinte Fig. 2.

O conceito de plano de curvatura é importante uma vez que a viga aqui considerada para a distinção entre os dois tipos de movimentos que podem ser estudados.



**Fig. 2 – Identificação do plano de curvatura**

<sup>1</sup> Comprimento maior que as dimensões da sua secção

O estudo será confinado a pequenas deformações em vigas curvas cujo comprimento é de dimensão superior quando comparado com as dimensões da secção transversal, isto é, considera-se que a viga é esbelta. Acontece que a viga apresenta seis graus de liberdade em todos os pontos da sua linha central, entre as suas extremidades opostas de secção transversal. Este estudo é também particularizado para vigas curvas cujas secções são simétricas em relação aos eixos  $x$  e  $y$ , em que as direcções do sistema de eixos local coincidindo com as direcções principais dos esforços axiais, transversais, de flexão e torção. Como pode ser ilustrado na Fig. 3 que representa o sistema de eixos local aplicado às duas extremidades da viga curva com as deformações e rotações possíveis de cor verde e azul respectivamente.

O movimento da viga curva, como corpo do espaço tridimensional, caracteriza-se pela composição de três translações mais três rotações, segundo os eixos ordenados, podendo ser este movimento dividido no estudo de dois tipos de movimento, os quais estão representados na figura anteriormente referida cada um com a representação dos graus de liberdade activos.



O modelo de viga curva em termos de movimento segundo os seus graus de liberdade, é equivalente à soma das duas situações seguintes:

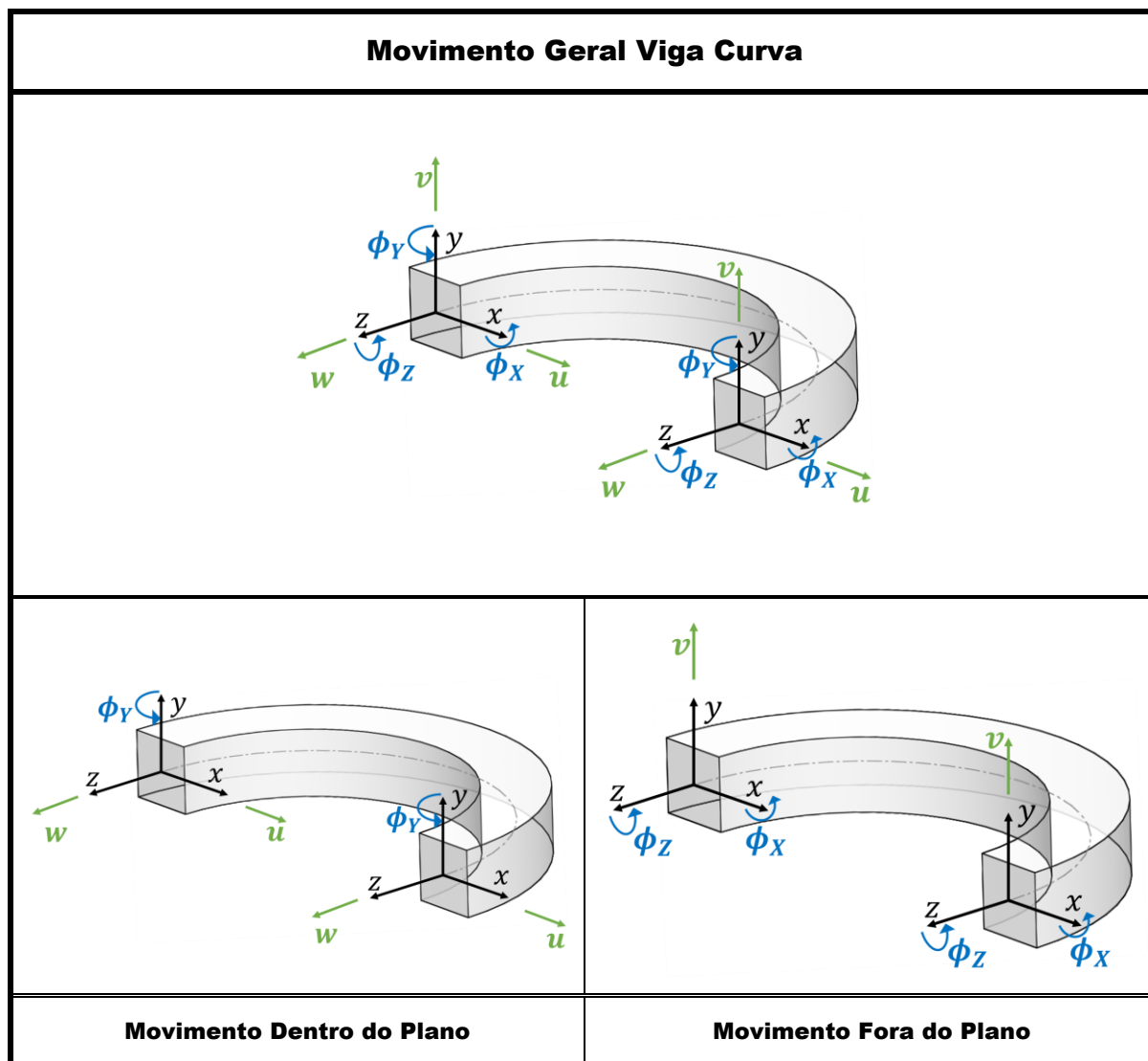


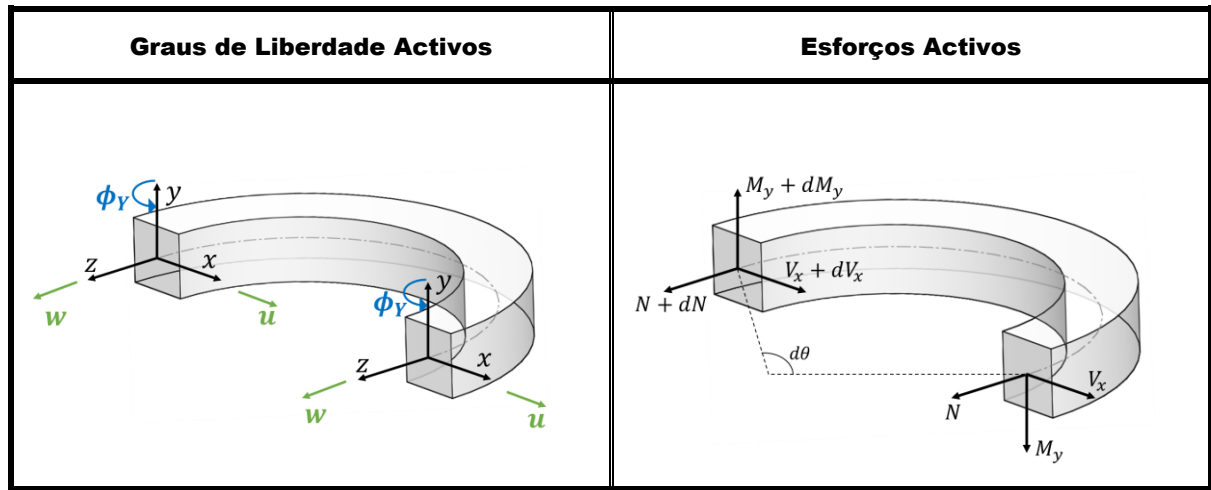
Fig. 3 – Classificação de Movimentos da Viga Curva

Portanto temos que este modelo contínuo de viga curva é dividido no estudo de dois tipos de movimentos, dentro e fora do plano de curvatura.

## 2.1 Esforços e Equações de Equilíbrio

### 2.1.1 Movimento Dentro do Plano

A Fig. 4 representa um elemento de viga em equilíbrio dinâmico, onde se indica o momento flector  $M_y$ , o esforço transverso  $V_x$ , esforço normal  $N$ , assim como os correspondentes deslocamentos: radial  $u$ , tangencial  $w$  e rotação  $\phi_y$ .



**Fig. 4 – Mov. Dentro Plano - Graus de Liberdade e Esforços**

Este tipo de movimento pode ser perfeitamente representado num plano bidimensional em que ocorrem translações radiais  $u$  e tangenciais  $w$  acompanhados da rotação da secção transversal  $\phi_y$ .

As equações diferenciais de segundo grau que traduzem este movimento foram estudadas no trabalho [7] sendo as equações de equilíbrio que tratam este movimento, as seguintes:

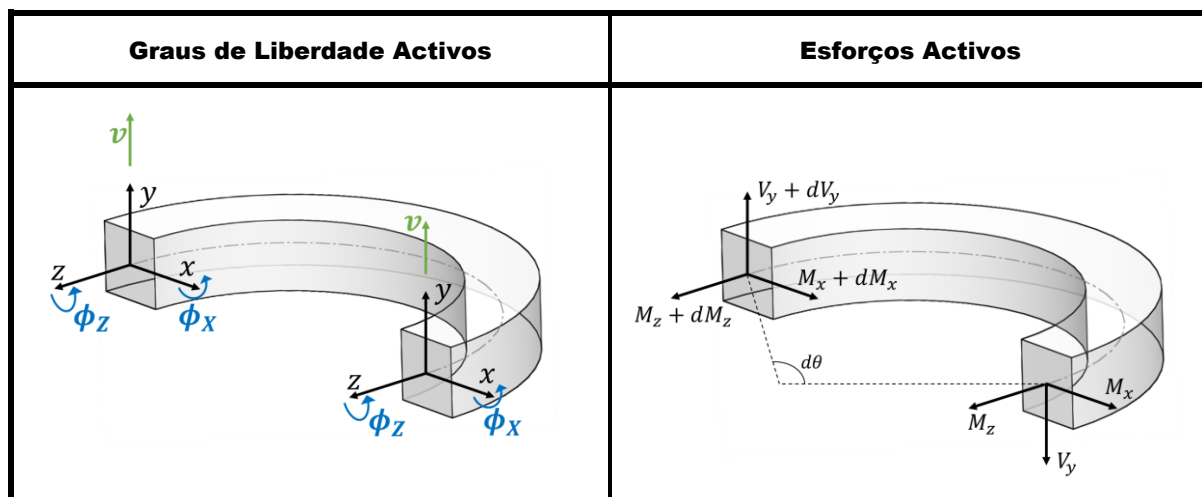
$$\frac{\partial M_y}{\partial \theta} + V_x \cdot R - \rho \cdot R \cdot I_y \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1a)$$

$$\frac{\partial N}{\partial \theta} - V_x - \rho \cdot A \cdot R \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1b)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial \theta} + N - \rho \cdot A \cdot R \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1c)$$

### 2.1.2 Movimento Fora do Plano

A Fig. 5 representa um elemento de viga em equilíbrio dinâmico, onde se indica o momento flector  $M_x, M_z$ , o esforço transversal  $V_y$ , assim como os correspondentes deslocamentos:  $v$ , rotação  $\phi_x$  e rotação  $\phi_z$ .



**Fig. 5 – Mov. Fora Plano - Graus de Liberdade e Esforços**

Este tipo de movimento não planar, pode ser representado tridimensionalmente uma vez que existem movimentos nos três planos em que ocorrem rotações  $\phi_x$  e torção  $\phi_z$  da secção acompanhadas da translação  $v$  perpendicular ao plano de curvatura.

As equações diferenciais de segundo grau que traduzem este movimento foram estudadas no trabalho [7] sendo as equações de equilíbrio que tratam este movimento, as seguintes:

$$\frac{\partial V_y}{\partial \theta} - \rho \cdot A \cdot R \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (2.2a)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial \theta} + M_z - V_y \cdot R + \rho \cdot R \cdot I_x \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} = 0 \quad (2.2b)$$

$$\frac{\partial M_z}{\partial \theta} + M_x - \rho \cdot R \cdot J_z \frac{\partial^2 \phi_z}{\partial t^2} = 0 \quad (2.2c)$$

## 2.2 Solução

Como solução dos conjuntos de equações vistas para ambos os movimentos, será apresentado o procedimento que leva à sua solução de acordo com o trabalho [7].

Acontece que temos equações diferenciais homogêneas de coeficientes constantes de grau seis, cuja solução pode ser dada pelas raízes do polinómio característico. A equação característica da equação diferencial homogênea que traduz o equilíbrio dinâmico da viga curva, dentro e fora do plano de curvatura, tem a forma:

$$\lambda^6 + A_4\lambda^4 + A_2\lambda^2 + A_0 = 0 \quad (2.3)$$

Onde  $A_4$ ,  $A_2$  e  $A_0$  são constantes definidas para cada tipo de movimento de vibração, em [7] que dependem das características materiais, geométricas e da frequência em questão. Este polinómio de grau 6 pode sofrer uma mudança de variável  $\lambda^2 = \zeta - A_4/3$ , conhecida como forma de Cardan que simplifica a equação (2.3) na seguinte equação:

$$\zeta^3 + \Pi\zeta + \Gamma = 0$$

Esta equação admite 3 tipos de raízes, dependendo do valor do respectivo discriminante, dado por:

$$\Delta = \frac{\Gamma^2}{4} + \frac{\Pi^3}{27}$$

Em que os termos que constituem o discriminante são:

$$\Pi = A_2 - A_4/3$$

$$\Gamma = (2/27) \cdot A_4^3 - (1/3) \cdot A_4 \cdot A_2 + A_0$$

Após o cálculo das raízes podem resultar os 3 seguintes casos:

**Caso A:**  $\Delta > 0 \rightarrow$  1 raíz real e duas complexas conjugadas

**Caso B:**  $\Delta = 0 \rightarrow$  3 raízes reais e pelo menos duas iguais

**Caso C:**  $\Delta < 0 \rightarrow$  3 raízes reais e todas diferentes

Das três situações possíveis para os valores do discriminante, na prática apenas dois deles ocorrem sendo o Caso B muito raro de se obter. Assim, de acordo com os casos A e C, serão calculadas as 6 raízes  $\lambda$ , para cada caso para se obter a matriz linha  $[D(\theta)]$ , constituída por 6 elementos na forma trigonométrica com funções reais e/ou hiperbólicas.

- **Caso A:**

Calculando  $\Pi$  e  $\Gamma$  e sabendo o ângulo de abertura  $\alpha$  calcula-se  $\xi_{1,2,3}$ :

$$\begin{aligned}\xi_1 &= 2\sqrt{-\Pi/3} \cdot \cos(\alpha/3) \\ \xi_{2,3} &= 2\sqrt{-\Pi/3} \cdot \cos((\alpha/3) \pm 60)\end{aligned}$$

- **Caso C:**

Calculando  $\Pi$  e  $\Gamma$  e sabendo o discriminante  $\Delta$  calcula-se  $\xi_{1,2,3}$ :

$$U = \sqrt[3]{-\frac{\Pi}{2} + \sqrt{\Delta}} \quad V = \sqrt[3]{-\frac{\Pi}{2} - \sqrt{\Delta}} \quad \text{temos } \xi_{1,2,3} \text{ dado por } \begin{aligned} \xi_1 &= U + V \\ \xi_{2,3} &= -\frac{U+V}{2} \pm i \frac{U-V}{2} \sqrt{3} \end{aligned}$$

Admite-se  $x_i = \zeta_i - A_4/3$ , tendo-se finalmente  $\lambda_{1,4} = \pm\sqrt{x_1}$ ,  $\lambda_{2,5} = \pm\sqrt{x_2}$ ,  $\lambda_{3,6} = \pm\sqrt{x_3}$ , concluindo-se os passos para se obter a matriz  $[D(\theta)]$ . Dado que para uma equação diferencial do tipo:

$$\frac{d^6 y}{d\theta^6} + A_4 \frac{d^4 y}{d\theta^4} + A_2 \frac{d^2 y}{d\theta^2} + A_0 \quad \text{em que } y = y(\theta), \text{ tem-se como solução}$$

$$y = \sum R_i e^{\lambda_i \theta} \text{ sendo } y = R_1 e^{\theta\sqrt{x_1}} + R_4 e^{-\theta\sqrt{x_1}} + R_2 e^{\theta\sqrt{x_2}} + R_5 e^{-\theta\sqrt{x_2}} + R_3 e^{\theta\sqrt{x_3}} + R_6 e^{-\theta\sqrt{x_3}} \text{ logo,}$$

a solução pode ser escrita na forma:  $y = [D(\theta)] \cdot \{C\}$  daí ser fundamental o cálculo das raízes  $\lambda$ .

Em que dentro de cada um dos casos A e C existem subcasos e cada um deles com as suas expressões no Apêndice 1 do trabalho [8].

Temos 3 casos possíveis sendo que o último caso (C) é desprezado. Dependendo do caso em questão podemos ter novas situações e assim podemos ter as expressões que nos permitem calcular os termos da matriz  $[D(\theta)]$ .

## 2.3 Matrizes $[A_t]$ e $[B_t]$

Para o cálculo de esforços e deslocamentos é necessário o cálculo das duas matrizes  $[A_t]$  e  $[B_t]$ . Essas matrizes dependem dos tipos de movimento, dos 3 tipos de casos e subcasos vistos previamente.

As matrizes  $[A_t]$  e  $[B_t]$  dependem também da matriz  $[D(\theta)]$  e das suas derivadas até à sexta ordem consoante o tipo de geometria, material, efeitos a contabilizar e o tipo de movimento em questão.

- **Dentro do Plano**

$$\left\{ \begin{array}{c} W(0) \\ U(0) \\ R \cdot \Phi_y(0) \\ \hline W(\alpha) \\ U(\alpha) \\ R \cdot \Phi_y(\alpha) \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{c} [A(0)] \\ \hline [A(\alpha)] \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \hline c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} \tilde{N}(0) \\ \tilde{V}_x(0) \\ \tilde{M}_y(0)/R \\ \hline \tilde{N}(\alpha) \\ \tilde{V}_x(\alpha) \\ \tilde{M}_y(\alpha)/R \end{array} \right\} = \frac{EI_y}{R^3} \left[ \begin{array}{c} [B(0)] \\ \hline [B(\alpha)] \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \hline c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{array} \right\}$$

**Fig.6 – Matriz  $[A(\theta)]$  e  $[B(\theta)]$  para mov. dentro do plano**

- **Fora do Plano**

$$\left\{ \begin{array}{c} V(0) \\ R \cdot \Phi_x(0) \\ R \cdot \Phi_z(0) \\ \hline V(\alpha) \\ R \cdot \Phi_x(\alpha) \\ R \cdot \Phi_z(\alpha) \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{c} [A(0)] \\ \hline [A(\alpha)] \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \hline c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} \tilde{V}_y(0) \\ \tilde{M}_x(0)/R \\ \tilde{M}_z(0)/R \\ \hline \tilde{V}_y(\alpha) \\ \tilde{M}_x(\alpha)/R \\ \tilde{M}_z(\alpha)/R \end{array} \right\} = \frac{EI_x}{R^3} \left[ \begin{array}{c} [B(0)] \\ \hline [B(\alpha)] \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \hline c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{array} \right\}$$

**Fig. 7 — Matriz  $[A(\theta)]$  e  $[B(\theta)]$  para mov. fora do plano**

O vector dos deslocamentos generalizados  $\{\delta\}$  das secções extremas e o vector de forças  $\{P\}$  nas extremidades da viga, podem, respectivamente, ser escritos através da equação 2.47 e 2.66 de [7]:

$$\{\delta\} = [A_t] \cdot \{X\} \quad \text{e} \quad \{P\} = \frac{EI_i}{R^3} [B_t] \cdot \{X\} \quad , \quad \begin{array}{l} i = x, \text{ Mov. Fora Plano} \\ i = y, \text{ Mov. Dentro Plano} \end{array}$$

## 2.4 Matrizes Rigidez Dinâmica e Receptância

O vector  $\{F\}$  representa os esforços aplicados em termos de força para cada um dos 6 graus de liberdade, nas coordenadas locais. Para esforços aplicados na forma de coordenadas locais  $\{P\}$ , recorreremos à multiplicação pela matriz  $[Q]$  que garante a transformação destas mesmas coordenadas para globais:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = Q \begin{Bmatrix} P(0) \\ P(\alpha) \end{Bmatrix} = [Q]\{P\}$$

Seguidamente podemos calcular  $\{F\}$  pela expressão 2.67 de [7]:

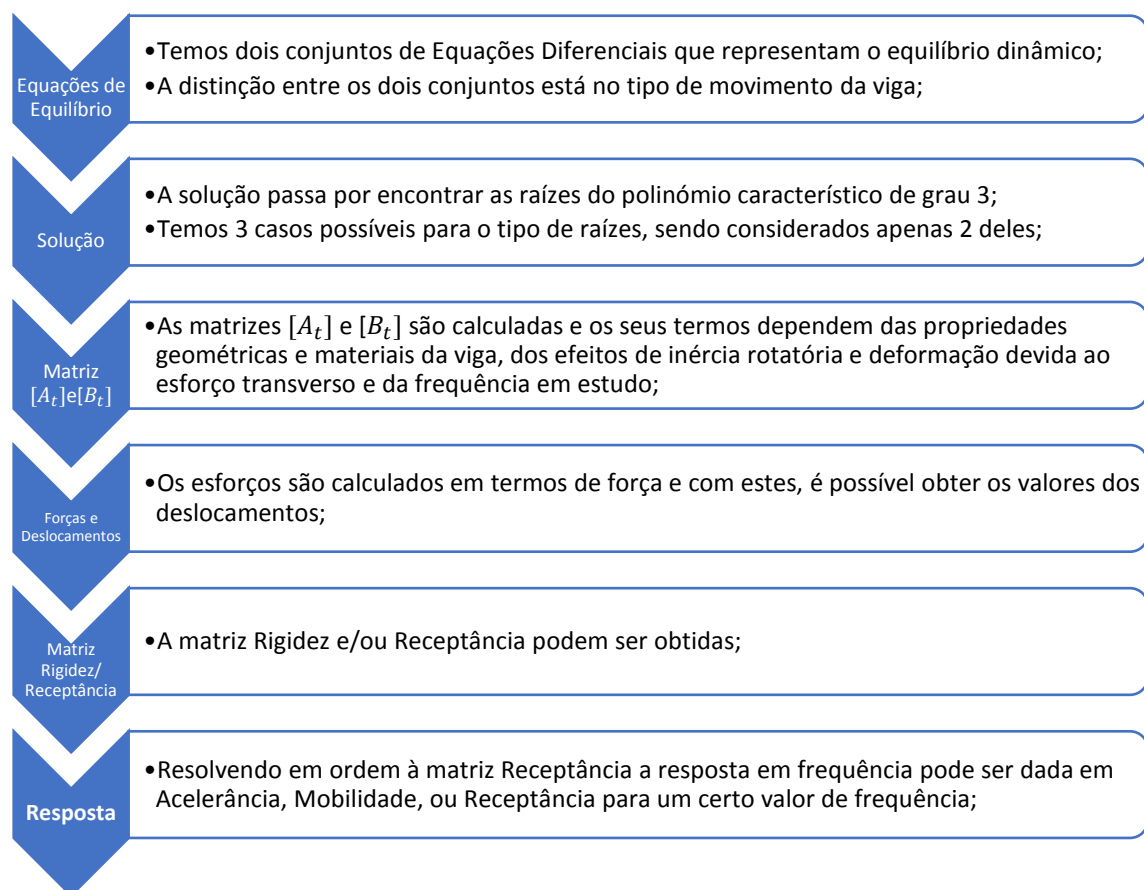
$$\begin{aligned} \{P\} &= \frac{EI_i}{R^3} [B_i] \{X\} \quad \text{com} \quad \begin{array}{l} i = x, \text{ Mov. Fora Plano} \\ i = y, \text{ Mov. Dentro Plano} \end{array} \\ \{F\} &= [Q] \times \frac{EI_i}{R^3} [B_i] \{X\} \\ \text{Seja } [S] &= \frac{EI_i}{R^3} [Q][B_i] \quad \text{vem} \quad \{F\} = [S]\{X\} \end{aligned}$$

Tendo a expressão de  $\{P\}$ , obtem-se  $\{F\}$ . Define-se  $[S]$  como a matriz acima permitindo simplificar de forma útil a expressão de  $\{F\}$ , frisando que o objectivo é a obtenção das matrizes rigidez e/ou receptância. Uma vez tendo os esforços calculados em termos de força generalizada e sabendo que os deslocamentos dependem destes, podemos ter um vector  $\{\delta\}$  que representa os deslocamentos em cada um dos 6 graus de liberdade. Vendo-se anteriormente que estes dependem de  $[A_i]$  e  $\{X\}$  dependendo, este último, por sua vez dos esforços são dados pelas equações 2.70 e 2.72 de [7]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \delta(0) \\ \delta(\alpha) \end{array} \right\} = [A_i] \{X\} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{Sendo } \{X\} = [S]^{-1} \{F\} \text{ vem} \\ \{ \delta \} = [A_i] [S]^{-1} \{F\} \Leftrightarrow \{ \delta \} = [A_i] \left[ \frac{EI}{R^3} [Q][B_i] \right]^{-1} \{F\} \Leftrightarrow \\ \text{Sendo a matriz Receptância (ou Flexibilidade Dinâmica)} \\ \text{dada por: } [R_i] = [A_i] \left[ \frac{EI}{R^3} [Q][B_i] \right]^{-1} \text{ tem-se } \{ \delta \} = [R_i] \{F\} \\ \text{A matriz Rigidez Dinâmica é dada por } [K_i] = [R_i]^{-1} \end{array} \right.$$

## 2.5 Compreensão Geral

Todo o raciocínio da Análise Teórica segue uma linha composta pelas etapas da Fig. 8, ou seja:



**Fig. 8 – Etapas de cálculo da resposta**

A *FRF* poderá ser representada para uma certa gama de frequências, para um certo elemento da matriz receptância, estando cada um dos 36 elementos associado à deformação devido a uma certa força com a disposição na Fig. 9 para cada tipo de movimento:

Dentro do Plano	Fora do Plano
$\begin{Bmatrix} w_0 \\ u_0 \\ \phi_{y0} \\ w_\alpha \\ u_\alpha \\ \phi_{y\alpha} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_0 \\ V_{x0} \\ M_{y0} \\ N_\alpha \\ V_{x\alpha} \\ M_{y\alpha} \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} v_0 \\ \phi_{x0} \\ \phi_{z0} \\ v_\alpha \\ \phi_{x\alpha} \\ \phi_{z\alpha} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_{y0} \\ M_{x0} \\ M_{z0} \\ V_{y\alpha} \\ M_{x\alpha} \\ M_{z\alpha} \end{Bmatrix}$

**Fig. 9 – Relação entre deslocamentos e esforços para os termos da matriz receptância**



---

# Capítulo 3

## Modelo Computacional Analítico

### Introdução

O modelo computacional da análise de vigas curvas foi desenvolvido em linguagem *MatLab* (*MA-Trix LABoratory*) pretendendo-se criar um programa de excelente performance numa linguagem conhecida no mundo da engenharia indicada para análise numérica, capaz de operar eficientemente com matrizes e a mais forte do mercado no resultado gráfico das soluções em vista.

Portanto, pode ser garantido que é tido um código numa linguagem moderna e universal cujo resultado pode ser visto com um excelente e interactivo aspecto gráfico opostamente aos resultados puramente matemático/numéricos apresentados por grande parte das demais linguagens de programação.

Uma vez que existe um código desenvolvido, é importante a sua representação na forma de fluxograma<sup>1</sup> para o acompanhamento de todo o raciocínio lógico feito na implementação do modelo analítico no desenvolvimento do presente modelo computacional, como o que se segue na Fig. 10.

---

<sup>1</sup>Toda a nomenclatura e notação usada no fluxograma sucede ao que foi feito em [7] anterior mantendo-se assim a coerência entre ambos os trabalhos

## Organigrama

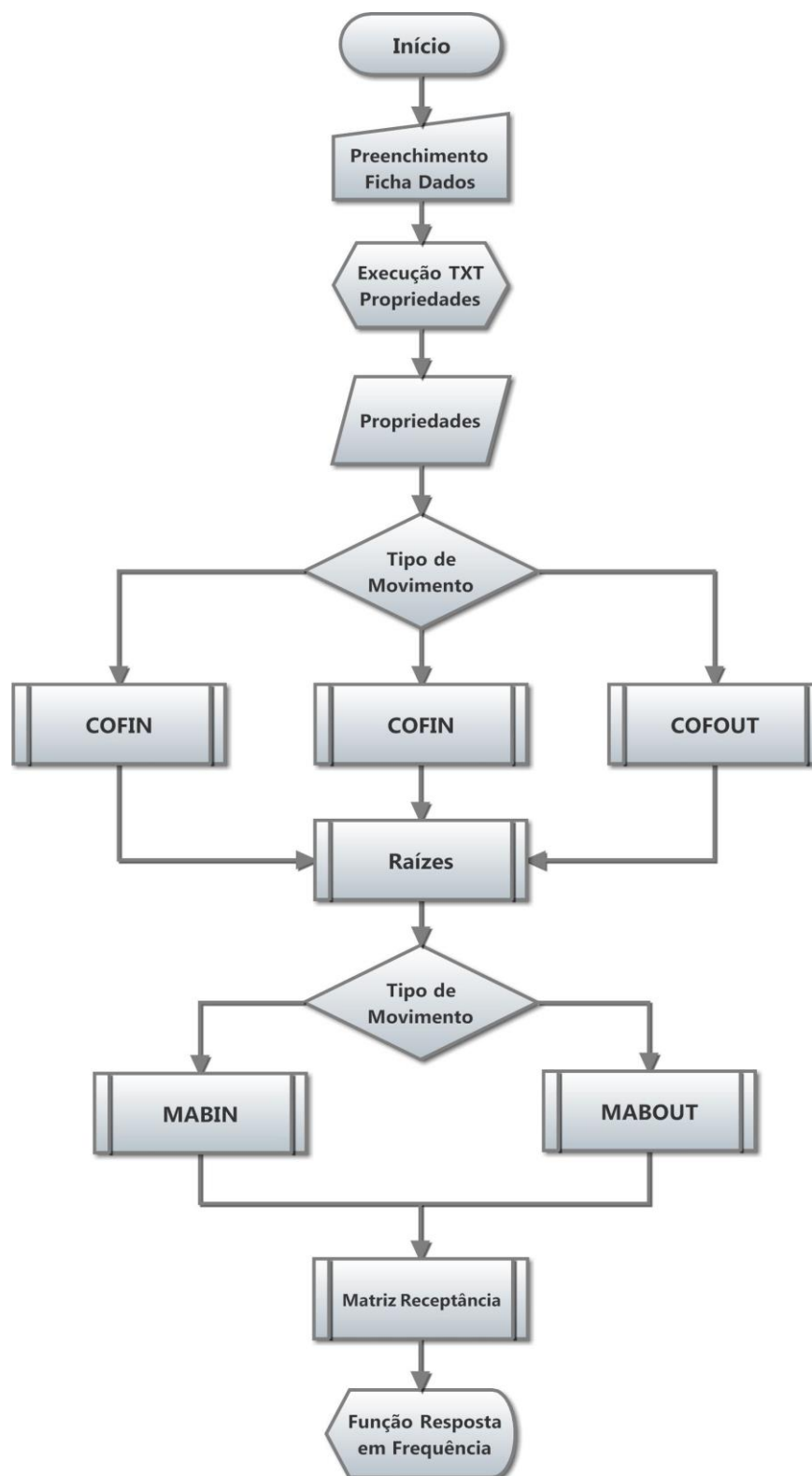


Fig. 10 – Fluxograma

**Preenchimento Ficha de Dados** - O Início da análise dinâmica da viga curva em questão é iniciada com um preenchimento manual de uma ficha de dados no formato *TXT* onde todas as propriedades materiais e geométricas são declaradas, assim como a gama de frequências no tipo de estudo selecionado. É de frisar que na Ficha de Dados pode ser escolhido o tipo de estudo a efectuar:

- Estudo Tipo 1 - apenas é calculada a *FRF* de uma viga de parâmetros geométricos fixos
- Estudo Tipo 2 - podem ser dadas as curvas onde estão contidas as quatro primeiras frequência naturais em função do ângulo de abertura da mesma, para um certo comprimento.

**Execução TXT Propriedades** – Após o preenchimento da Ficha de Dados, esta será executada pelo *MatLab* e os dados serão carregados para o programa.

**Propriedades** – Os dados carregados anteriormente formam o *input* exigido pelo programa ditando assim qual o procedimento lógico de cálculo a seguir pelo programa.

**Tipo de Movimento** – O tipo de movimento em estudo estará especificado nos dados Propriedades conduzindo o programa para o cálculo dos coeficientes do polinómio de grau 6 de acordo com as expressões de cada tipo de movimento.

**COFIN<sup>2</sup> / COFOUT** – Nestas subrotinas serão calculados os coeficientes do polinómio de grau 6 cujos coeficientes dependem da geometria e área da secção da viga assim como das suas propriedades materiais.

**Raízes** – Com os coeficientes anteriores é construído um polinómio de grau 3 já convertido na forma de Cardan cujas raízes reais e imaginárias são calculadas nesta subrotina.

**Tipo de Movimento** – O tipo de movimento irá condicionar a forma de como as Matrizes  $[A_t]$  e  $[B_t]$  serão calculadas.

**Matriz Receptância** – Esta subrotina procede ao cálculo para cada valor da gama de frequência especificada a matriz receptância constituída por 6 linhas e 6 colunas.

**Função Resposta em Frequência** – O resultado gráfico da função resposta em frequência é obtido neste passo. É de frisar que a resposta em frequência pode ser dada por qualquer elemento da matriz receptância (dos 36) à escolha do utilizador.

---

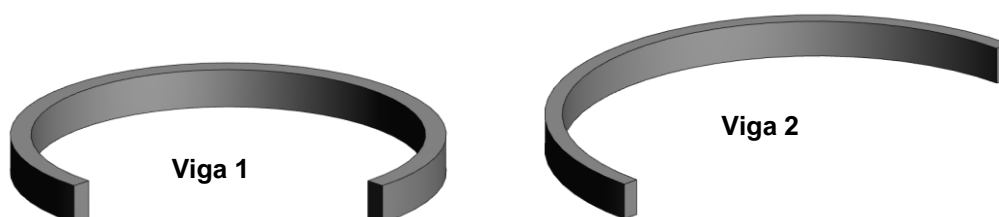
<sup>2</sup> No organigrama da Fig. 10 existem duas subrotinas, associadas à contabilização, ou não, do efeito da extensão da linha central

## 3.1 Validação Modelo – Estudo Tipo 1

### 3.1.1 Selecção dos Casos de Referência

Após uma longa e morosa programação lógica altamente compactada em mais de cinco mil linhas, foram feitos testes rigorosos quanto aos valores dados pelo programa sendo a validação deste modelo computacional analítico feita, numa primeira fase, com dados experimentais do trabalho anterior [7] na medida em que tendo sido feitos ensaios a 3 vigas diferentes nesse trabalho, será feito um confronto de dados certificando-se assim de que de facto este modelo desenvolvido é fiável e realista nos seus resultados.

Portanto é assim feito o teste para 3 vigas de iguais propriedades materiais, variando-se apenas as características geométricas, sendo a Viga 1 e a Viga 2 de igual secção e comprimento variando o ângulo de abertura de  $270^\circ$  para  $180^\circ$  respectivamente.



**Fig. 11 – Vigas Referência Secção Rectangular**

A Viga 3 mantém o mesmo ângulo de abertura que a Viga 2 ( $180^\circ$ ) diferindo na sua secção transversal que passa de rectangular (Viga 1 e 2) para circular. Temos então alguma variação nos parâmetros das vigas que nos permitem fazer variadas análises ao modelo computacional testando assim a sua consistência em termos de repetibilidade e precisão.



**Fig. 12 – Viga Referência Secção Circular**

A tabela abaixo além de representar todos os dados sobre as vigas referidas, representa os *inputs* a inserir no ficheiro *TXT* antes da execução do programa na sua ordem. Estão assim tabeladas algumas das variáveis que o utilizador necessita tomar conhecimento para descrever a viga curva que pretende analisar.

Viga Aço CK45	Viga 1	Viga 2	Viga 3
Secção			
<b>Ficha de Dados</b>			
$Esp$ (m)	0.016	0.016	0.025
$Alt$ (m)	0.032	0.032	-----
$Raio$ (m)	0.16	0.24	0.24
$L$ (m)	0.754	0.754	0.754
$\alpha$ (°)	270	180	180
$IR$	1	1	1
$IS$	1	1	1
$\omega_{INICIAL}$ (Hz)	0	0	0
$\omega_{FINAL}$ (Hz)	3000	3000	3000
$\omega_{DELAY}$ (Hz)	0.1	0.1	0.1
$E$ (GPa)	207	207	207
$\rho$ (Kg / m <sup>3</sup> )	7755	7755	7755
$C_{NIU}$	0.288	0.288	0.288

Tabela 1 – Dados Principais do Programa

Nas tabelas seguintes têm-se os resultados das três vigas referidas na forma de ressonâncias apresentadas de forma crescente ao longo de cada linha. Na primeira linha de cada tabela existem dados correspondentes ao movimento dentro<sup>1</sup> e fora do plano. Para estes dois movimentos temos os resultados obtidos pelo estudo computacional<sup>2</sup>, obtidos por Urgueira<sup>3</sup> [7] juntamente com os seus resultados experimentais (*EXP*) e ainda o erro relativo (*ERRO*) do modelo computacional desenvolvido face aos resultados experimentais.

Cada caso de referência estudado está acompanhado de quatro gráficos onde estão representadas as *FRF* intitulados com a posição correspondente à matriz receptância para ambos os tipos de movimento. Estas curvas onde o logaritmo da aceleração está calculado em função da frequência apresentam o resultado do Estudo Tipo 1 aplicado aos casos de referência seleccionados.

<sup>1</sup> Este movimento pode contemplar ou não a extensão da linha central, apresentando-se ambos os resultados

<sup>2</sup> Os resultados do modelo computacional são intitulados de *MatLab*, a linguagem usada nesta programação

<sup>3</sup> Os resultados computacionais obtidos em [7] são intitulados por *Fortran*, a linguagem usada nesse código

### 3.1.2 Validação Via Experimental

#### Viga 1

In	MATLAB $\varepsilon_z = 0$ (Hz)	MATLAB $\varepsilon_z \neq 0$ (Hz)	FORTTRAN (Hz)	EXP (Hz)	ERRO (%)	Out	MATLAB (Hz)	FORTTRAN (Hz)	EXP (Hz)	ERRO (%)
R1	113,2	113,1	113,2	110,3	2,6	R1	253,6	250,8	250,5	1,2
R2	295,6	296,1	295,46	288,55	2,4	R2	767,9	760,4	747,1	2,8
R3	648,5	651,3	648,2	634,3	2,2	R3	1577	1564,2	1487,5	6,0
R4	1146	1155	1145,4	1120,6	2,3	R4	2597	2580	2460	5,6
R5	1772	1795	1763,5	1731,75	2,3					

Tabela 2 – Comparação de Resultados via Experimental – Viga 1 Dentro e Fora do Plano

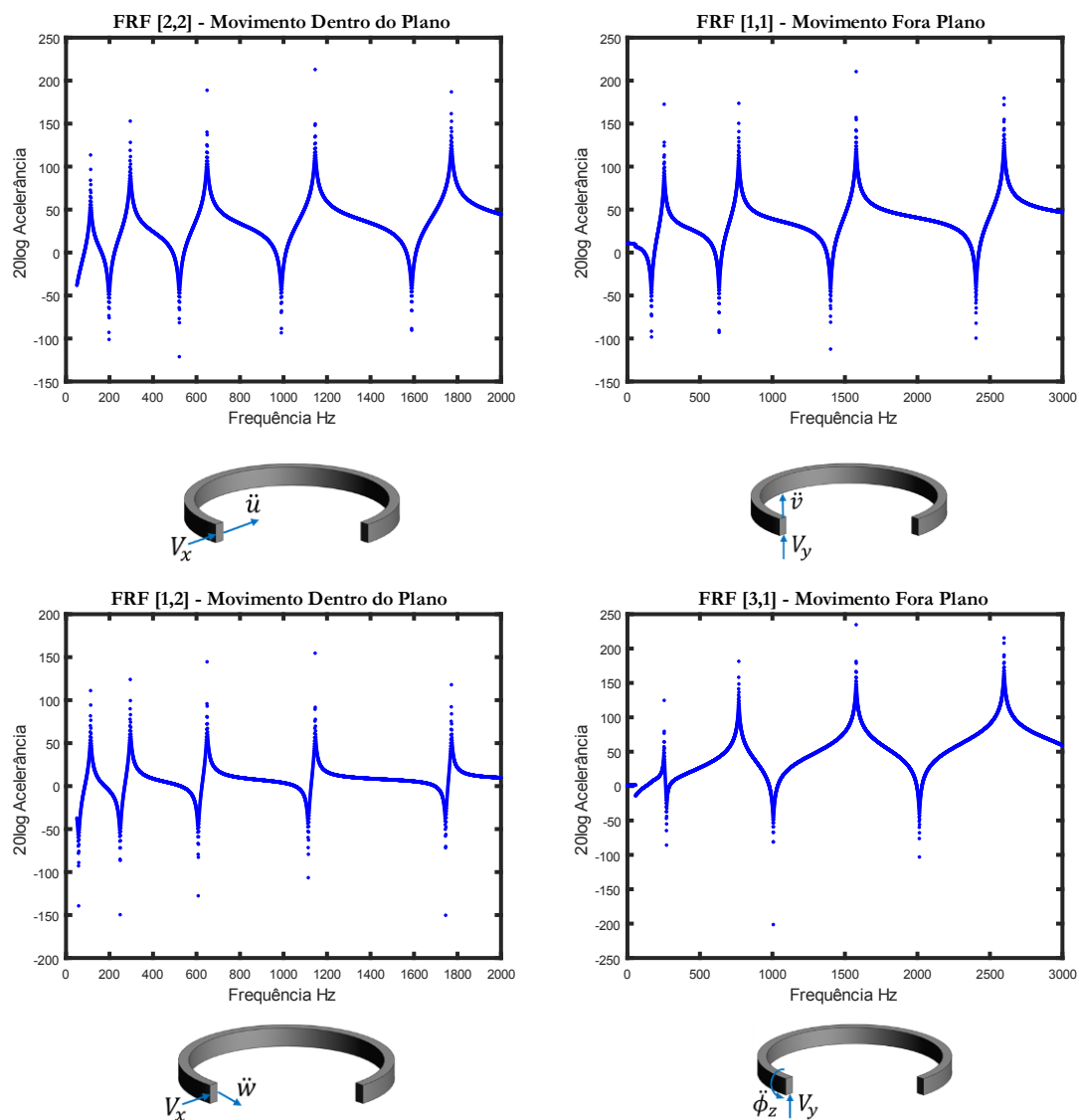


Fig. 13 – Resultados Estudo Tipo 1 - Viga1

## Viga 2

<i>In</i>	MATLAB $\varepsilon_z = 0$ (Hz)	MATLAB $\varepsilon_z \neq 0$ (Hz)	FORTTRAN (Hz)	EXP (Hz)	ERRO (%)	<i>Out</i>	MATLAB (Hz)	FORTTRAN (Hz)	EXP (Hz)	ERRO (%)
R1	121	121	120,7	118	2,5	R1	395,4	391	387,5	2,0
R2	348,6	349,3	348,3	335,5	3,9	R2	1015	1007,2	967,6	4,9
R3	726,6	730,2	726,3	702,5	3,4	R3	1893	1882	1717,5	10,2
R4	1236	1247	1237	1193	3,6	R4	2836	2818	2763	2,6
R5	1869	1895	1847	1803	3,7					

Tabela 3 – Comparação de Resultados via Experimental – Viga 2 Dentro e Fora do Plano

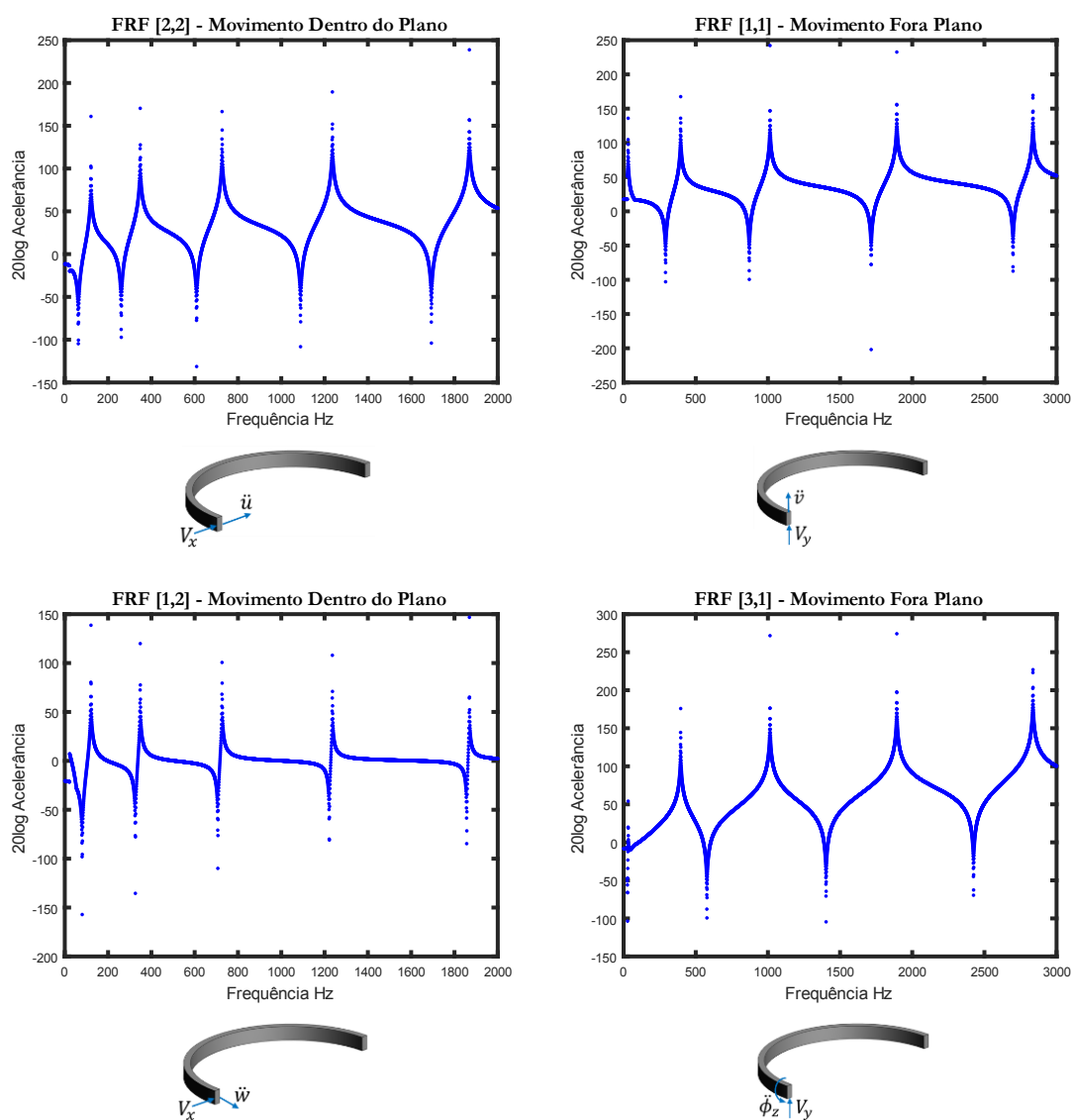


Fig. 14 – Resultados Estudo Tipo 1 - Viga2

## Viga 3

<i>In</i>	MATLAB $\varepsilon_z = 0$ (Hz)	MATLAB $\varepsilon_z \neq 0$ (Hz)	FORTTRAN (Hz)	EXP (Hz)	ERRO (%)	<i>Out</i>	MATLAB (Hz)	FORTTRAN (Hz)	EXP (Hz)	ERRO (%)
R1	163,5	163,6	163,5	161	1,6	R1	366,8	367	365,8	0,3
R2	470,1	471,8	469,6	459,4	2,3	R2	809,7	810,6	804,5	0,6
R3	976,8	985,1	976,6	956,8	2,1	R3	1495	1496	1485	0,7
R4	1655	1680	1654,5	1612	2,7	R4	2008	-	-	-
R5	2489	2547	2458	2416	3,0	R5	2659	2624	2573	3,3

Tabela 4 – Comparação de Resultados via Experimental – Viga 1 Dentro e Fora do Plano

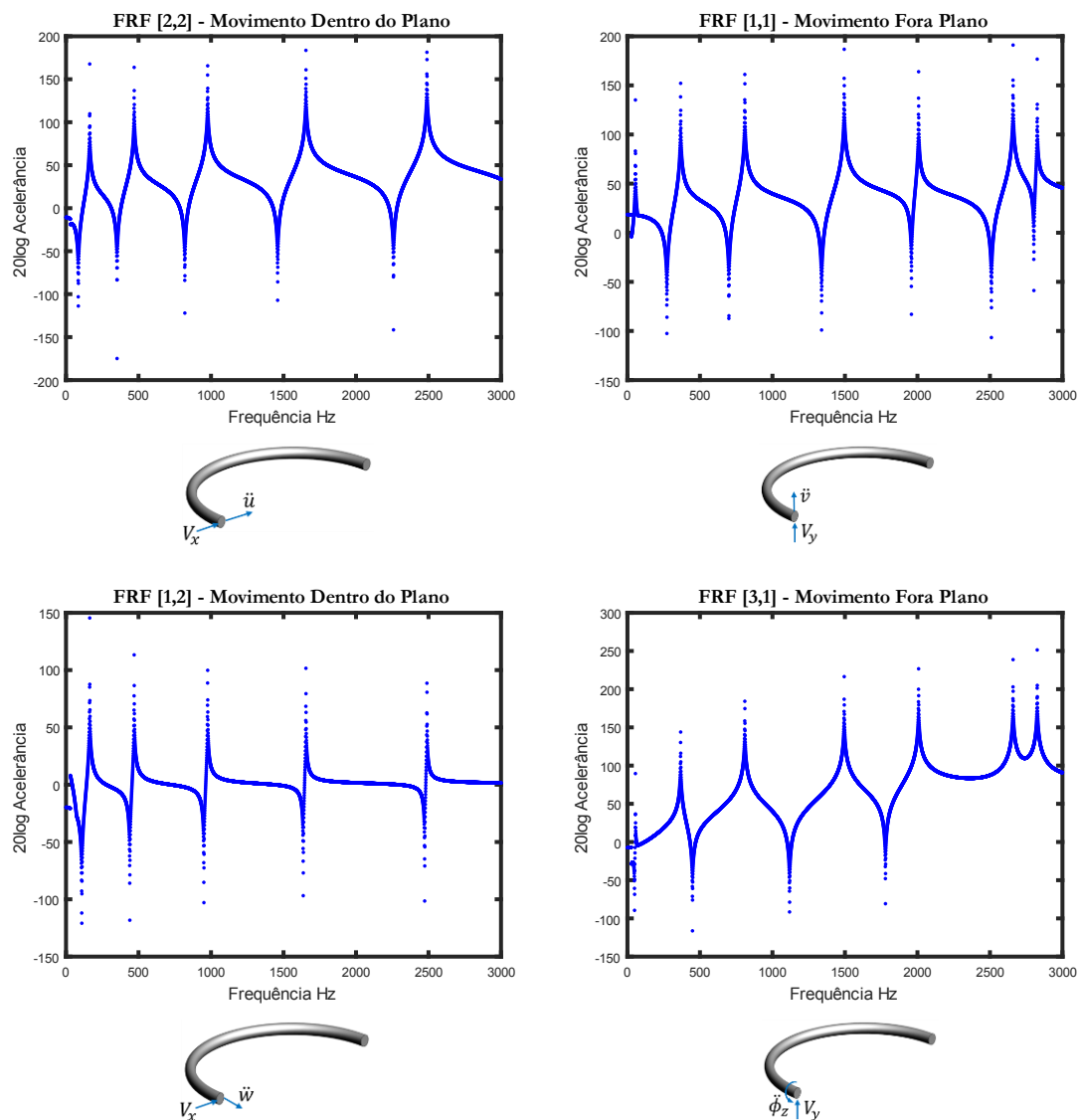


Fig. 15 – Resultados Estudo Tipo 1 - Viga3



### 3.1.2.1 Discussão de Resultados

Com os resultados obtidos para as frequências naturais representadas nas tabelas 2, 3 e 4 podemos ter a segurança de que o modelo computacional desenvolvido garante resultados com um elevado grau de precisão, tendo em conta os valores de erro relativo. Em geral, os resultados obtidos pelo modelo computacional podem ser concordantes com os experimentais na perspectiva de existirem resultados com erro relativo inferior a 1% e nunca ultrapassando os 10,2%.

Ao se comparar os resultados obtidos para ambos os movimentos, verificou-se que o erro relativo é maior no movimento fora do plano, das três vigas testadas. Este movimento teve um erro superior possivelmente devido à geometria da secção transversal, mais especificamente a factores devidos à relação entre o módulo de rigidez à torção e da rigidez à flexão.

A Viga 1 é a que apresenta valores médios de erro relativo superiores em ambos os movimentos em comparação com as restantes vigas. Contudo, os resultados aparentam melhorar para uma viga de comprimento idêntico com ângulo de abertura de  $180^\circ$ , ou seja, a Viga 2.

Os melhores resultados para o referido erro calculado das 3 vigas em estudo são os da Viga 3. Verificou-se que a alteração da secção transversal da Viga 2 para uma forma circular (Viga 3) produziu uma melhoria de resultados, provavelmente devido ao aumento da relação rigidez torsional/flexão.

As curvas foram obtidas para cada uma das três vigas de referência na forma de quatro *FRF* aceleração diferentes, permitindo a comparação entre elas tanto do ponto de vista das frequências de ressonância como da amplitude do movimento.

Observando as quatro *FRF*, pode ser confirmado que em todos os casos, para cada exemplar de viga, todas elas apresentam os picos positivos à mesma frequência, existindo assim esta comprovação de que o programa computacional é consistente no cálculo das *FRF* directas e indirectas. A gama de frequências especificada, pode ser refinada com um passo de tal forma baixo, que é possível a representação de uma curva praticamente contínua.

Numa observação particular de valores iniciais até aproximadamente os 100  $Hz$ , nota-se em algumas *FRF* ligeiríssimas descontinuidades que podem estar possivelmente associadas à solução na forma 6 do trabalho [7] que não foram contempladas no algoritmo do programa, devido à sua rara ocorrência no cálculo das raízes do polinómio característico.

Contudo, o aspecto das curvas é claro e coerente no seu domínio em geral, não apresentando falhas de cálculo e aplicado a estas três vigas, o seu alcance estável de cálculo foi até nove frequências naturais.

Particularizando à aplicação deste estudo para de vigas curvas em engenharia, na qual deve ser evitado o esforço dinâmico às frequências de ressonância por exemplo, este modelo computacional pode ser um bom instrumento bussolar para indicar quais os valores de frequência de funcionamento a evitar.

### 3.1.4 Validação Via Numérica *M.E.F.*

Fazendo recurso do Software *ANSYS* que permite análises estruturais utilizando o método numérico dos elementos finitos, geraram-se além dos resultados experimentais do trabalho anterior [8], resultados numéricos o que é também a grande “novidade” deste trabalho.

Uma vez obtidos os resultados com o modelo computacional, foi desenvolvido um código em linguagem *APDL* no sentido de se proceder a um estudo de convergência de resultados na medida em que se reproduz uma viga curva feita de elementos rectos e, mais importante, a partir de quantos elementos rectos é possível fazer uma réplica dos resultados dados pelo modelo computacional analítico.

O programa elaborado na referida linguagem, foi concebido genericamente para uma análise de qualquer viga curva plana de secção e raio de curvatura constante dando possibilidade a um utilizador especificar os parâmetros<sup>1</sup> da viga curva que pretende analisar.

Os elementos rectos que constituem a viga curva são do tipo *BEAM189* mais vulgarmente conhecidos por elementos de viga do modelo Timoshenko, com 6 graus de liberdade em cada nó correspondendo às três translações e três rotações.

Este código em *APDL* extrai as frequências naturais permitindo uma análise modal no próprio software *ANSYS* com uma representação visual dos modos de vibração correspondentes a cada frequência natural, que é fundamental na garantia da correspondência correcta das frequências naturais quanto à sua ordem para cada tipo de movimento.

Neste estudo de simulação com elementos finitos, serão apresentados os resultados de frequências naturais para a Viga 1, 2 e 3 com diferentes números de elementos, isto é, com a adição de vários graus de liberdade fazendo-se a comparação entre estes com os obtidos via computacional analítica e a via experimental, apresentando-se o erro<sup>2</sup> relativo entre os resultados fruto deste estudo com os do modelo computacional analítico. Os resultados serão comentados e acompanhados da figura com a respectiva viga gerada pelo *software* e a sua malha.

---

<sup>1</sup> Entre estes parâmetros está o raio de curvatura, ângulo de abertura, tipo de secção assim como o número de nós que compõem os elementos do comprimento e da secção da viga

<sup>2</sup> O Erro relativo obtido tem em conta a comparação das simulações feitas sempre com 64 elementos

### Viga 1

<i>In</i>	<i>EXP.</i> (Hz)	<i>8 Elem.</i> 900 GL (Hz)	<i>16 Elem.</i> 1700 GL (Hz)	<i>32 Elem.</i> 3300 GL (Hz)	<i>64 Elem.</i> 6500 GL (Hz)	<i>MATLAB</i> (Hz)	<i>ERRO</i> (%)
<i>R1</i>	110,3	113,19	112,61	112,57	112,57	113,2	0,5
<i>R2</i>	288,55	302,31	295,87	295,4	295,37	295,6	0,07
<i>R3</i>	634,3	710,72	651,66	647,96	647,7	648,5	0,1
<i>R4</i>	1120,6	1259,5	1162,3	1145,1	1143,9	1146	0,1
<i>R5</i>	1731,75	2296,3	1830,3	1773,3	1769,3	1772	0,1

**Tabela 5 – Resultados via *MEF* e Modelo Computacional – Dentro Plano Viga 1**

<i>Out</i>	<i>EXP.</i> (Hz)	<i>8 Elem.</i> 900 GL (Hz)	<i>16 Elem.</i> 1700 GL (Hz)	<i>32 Elem.</i> 3300 GL (Hz)	<i>64 Elem.</i> 6500 GL (Hz)	<i>MATLAB</i> (Hz)	<i>ERRO</i> (%)
<i>R1</i>	250,5	253,81	252,52	252,45	252,45	253,6	0,4
<i>R2</i>	747,1	772,34	755,86	755,34	755,3	767,9	1,6
<i>R3</i>	1487,5	1380,9	1531,1	1526,9	1526,6	1577	3,3
<i>R4</i>	2460	2718,1	2468,4	2453,8	2452,6	2597	5,8

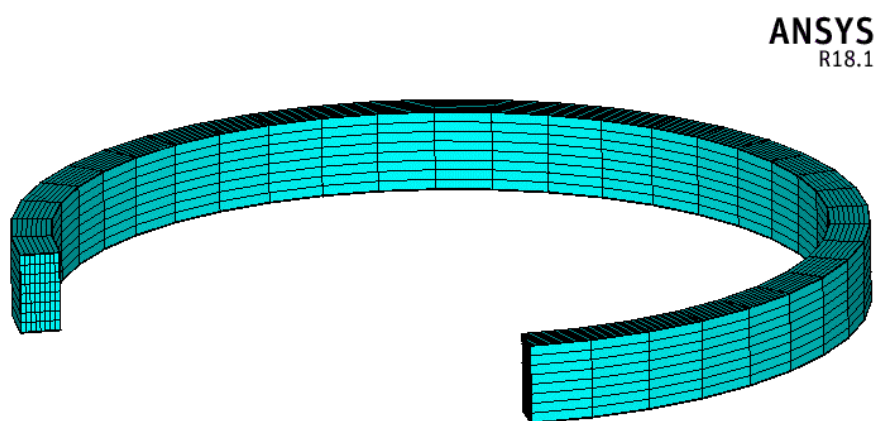
**Tabela 6 – Resultados via *MEF* e Modelo Computacional – Fora Plano Viga 1**

**Movimento Dentro do Plano** – Constata-se que o erro relativo não aumenta com o valor da frequência natural, apesar de ter sido esperada essa a tendência, uma vez que da primeira frequência natural para a segunda, houve uma diminuição de erro para  $R2$ , em relação a uma frequência  $R1$  anterior. Fazendo-se uma observação da convergência com o número de elementos, é mais acentuada com o aumento do número de elementos, para frequências naturais cada vez maiores, como era expectável.

O erro relativo médio das cinco ressonâncias é de 0,2% o que quantifica uma grande semelhança de valores entre o modelo numérico com elementos finitos e o analítico computacional desenvolvido.

**Movimento Fora do Plano** – Para este movimento, o erro tem um crescimento mais regular com o aumento da frequência natural seguindo o padrão esperado. Igualmente ao movimento anterior, apesar de ser ligeira a diferença de valores com o aumento do número de nós, essa diferença é maior para valores de ressonância maiores tipicamente de  $R3$  e  $R4$ .

O erro relativo médio das ressonâncias deste movimento é de 2,8% o que dá a interpretar que no cálculo via simulação numérica de uma frequência de ressonância para o movimento fora do plano, esta poderá apresentar um maior desvio do valor analítico computacional relativamente às frequências de ressonância do movimento dentro do plano.



**Fig. 16 – Modelação da Viga 1**

## Viga 2

<i>In</i>	<i>EXP.</i> (Hz)	<i>8 Elem.</i> 900 GL (Hz)	<i>16 Elem.</i> 1700 GL (Hz)	<i>32 Elem.</i> 3300 GL (Hz)	<i>64 Elem.</i> 6500 GL (Hz)	<i>MATLAB</i> (Hz)	<i>ERRO</i> (%)
<i>R1</i>	118	121,39	120,97	120,94	120,94	121	0,04
<i>R2</i>	335,5	356,67	348,95	348,39	348,35	348,6	0,07
<i>R3</i>	702,5	796,25	730,72	726,4	726,11	726,6	0,06
<i>R4</i>	1193	1387,5	1255,7	1236,4	1235,1	1236	0,07
<i>R5</i>	1803	2509,2	1933,9	1871,9	1867,5	1869	0,08

**Tabela 7 – Resultados via *MEF* e Modelo Computacional – Dentro Plano Viga 2**

<i>Out</i>	<i>EXP.</i> (Hz)	<i>8 Elem.</i> 900 GL (Hz)	<i>16 Elem.</i> 1700 GL (Hz)	<i>32 Elem.</i> 3300 GL (Hz)	<i>64 Elem.</i> 6500 GL (Hz)	<i>MATLAB</i> (Hz)	<i>ERRO</i> (%)
<i>R1</i>	387,5	393,56	391,78	391,67	391,66	395,4	0,9
<i>R2</i>	967,6	1011,5	988,05	986,56	986,45	1015	2,8
<i>R3</i>	1717,5	1710,5	1803,5	1795,6	1795	1893	5,4
<i>R4</i>	2763	2712,5	2487,5	2477,9	2477,1	2836	14,4

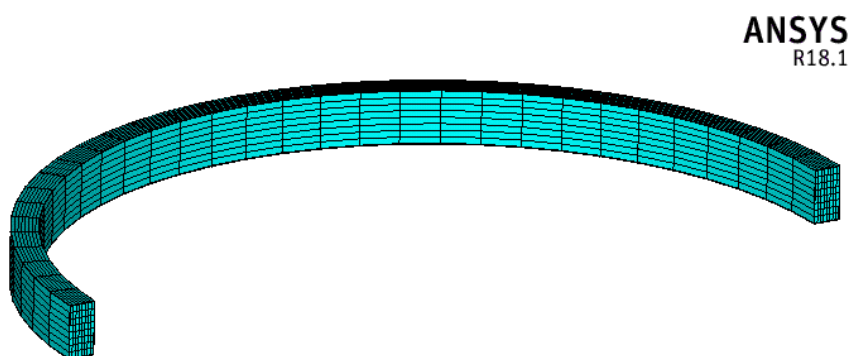
**Tabela 8 – Resultados via *MEF* e Modelo Computacional – Fora Plano Viga 2**

**Movimento Dentro do Plano** – De uma forma semelhante aos resultados da Viga 1, os valores de erro relativo não manifestam um crescimento constante, pois da segunda frequência de ressonância  $R2$  para a terceira  $R3$  há novamente um decréscimo seguido um aumento do erro relativo para as restantes frequências de ressonância  $R4$  e  $R5$ .

O erro relativo médio foi de 0,06% havendo uma diminuição de erro para o mesmo movimento que a viga anterior, chegando essa diminuição a uma ordem de grandeza. A convergência de valores para o modelo computacional analítico, faz-se notar em maior peso para a frequência de ressonância mais alta  $R5$  com o aumento de elementos finitos, em semelhança ao que aconteceu no caso anterior da Viga 1.

**Movimento Fora do Plano** – Neste tipo de movimento os resultados não contrariam os da Viga 1 relativamente ao crescimento regular do erro com o valor da frequência natural, sendo o crescimento desse erro entre duas e três vezes mais, de ressonância para ressonância.

O erro relativo médio atinge valores de 5,9%, o que se considera significativo em relação ao movimento dentro do plano e ao movimento fora do plano da Viga 1. O aumento de graus de liberdade na viga apenas altera os resultados para frequências naturais mais elevadas, nomeadamente para  $R4$  do movimento dentro do plano, tal como no movimento dentro do plano.



**Fig. 17 – Modelação da Viga 2**

### Viga 3

<i>In</i>	<i>EXP.</i> (Hz)	<i>8 Elem.</i> 900 GL (Hz)	<i>16 Elem.</i> 1700 GL (Hz)	<i>32 Elem.</i> 3300 GL (Hz)	<i>64 Elem.</i> 6500 GL (Hz)	<i>MATLAB</i> (Hz)	<i>ERRO</i> (%)
<i>R1</i>	161	164,05	163,49	163,45	163,45	163,5	0,03
<i>R2</i>	459,4	480,75	470,39	469,64	469,59	470,1	0,1
<i>R3</i>	956,8	1068,9	981,58	975,83	975,44	976,8	0,1
<i>R4</i>	1612	1852,3	1679	1653,6	1651,9	1655	0,1
<i>R5</i>	2416	3313,2	2571,1	2490,4	2484,6	2489	0,1

**Tabela 9 – Resultados via *MEF* e Modelo Computacional – Dentro Plano Viga 3**

<i>Out</i>	<i>EXP.</i> (Hz)	<i>8 Elem.</i> 900 GL (Hz)	<i>16 Elem.</i> 1700 GL (Hz)	<i>32 Elem.</i> 3300 GL (Hz)	<i>64 Elem.</i> 6500 GL (Hz)	<i>MATLAB</i> (Hz)	<i>ERRO</i> (%)
<i>R1</i>	365,8	371,59	367,13	366,81	366,79	366,8	0,002
<i>R2</i>	804,5	852,44	812,57	809,71	809,52	809,7	0,02
<i>R3</i>	1485	1562,6	1511,9	1495,5	1494,3	1495	0,04
<i>R4</i>	-----	2186,4	2025	2008,6	2007,4	2008	0,02
<i>R5</i>	2573	3116,1	2859,7	2827,9	2825,1	2659	5,8

**Tabela 10 – Resultados via *MEF* e Modelo Computacional – Fora Plano Viga 3**

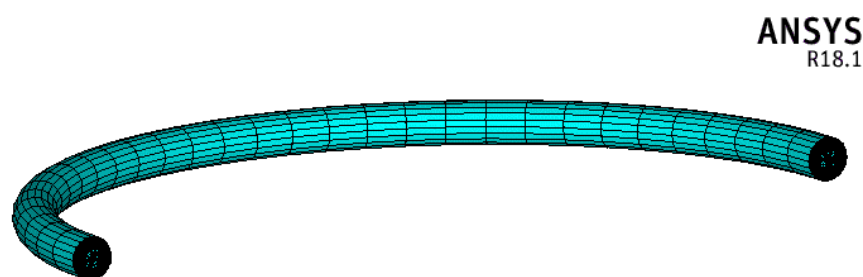


**Movimento Dentro do Plano** – Esta viga curva tem um desvio naquilo que foram os resultados anteriores das duas vigas na medida em que o erro relativo aumenta da primeira frequência natural  $R1$  para a segunda  $R2$  e mantém o seu valor daí em diante até à última frequência natural  $R5$ , nunca decrescendo o seu valor para frequências superiores.

O erro relativo médio de 0,09% pode traduzir o grande grau de semelhança dos resultados obtidos pelas duas vias e ao que se pode observar, até mesmo numa quinta ressonância  $R5$  o valor de erro é abaixo dos 1%.

**Movimento Fora do Plano** – Para este tipo de movimento a Viga 3 parece também contrariar aquilo que foi o aumento do erro com o valor da frequência natural, como aconteceu na Viga 1 e 2 pois houve um aumento do erro da primeira frequência natural para a segunda de e um decréscimo para metade do valor, surgindo um aumento do erro na última frequência natural calculada neste tipo de movimento.

Apesar deste tipo de movimento apresentar geralmente valores de erro superiores ao movimento dentro do plano para a mesma frequência, nesta viga sucedeu o oposto, sendo a média dos erros relativos deste movimento de 0,02%. A convergência acentua-se, passando a redundância, com o aumento de graus de liberdade. Excepcionalmente foi calculada, neste movimento, uma quinta frequência de ressonância pois no trabalho anterior [8] foi determinada uma frequência natural tratada como quarta ressonância que na realidade se trata da quinta frequência ressonância.



**Fig. 18 – Modelação Viga 3**

### 3.1.4.1 Discussão de Resultados

Surpreendentemente, apenas com uma viga constituída por 8 elementos é possível ter uma boa aproximação de resultados observando o valor do erro. Mas observando minuciosamente a convergência de resultados, é de verificar que a melhoria em aproximação de valores aumentando para 2, 4 e 8 vezes o valor inicial de elementos, é mais notável para frequências maiores.

Os valores das frequências naturais no movimento dentro do plano obtidos através do modelo computacional desenvolvido são de uma extraordinária semelhança para com os valores obtidos pela simulação numérica (*ANSYS*), vendo essa semelhança traduzida em erros todos eles inferiores a 1% nos três exemplares de vigas curvas.

Analisando o que foram os resultados no movimento fora do plano, interpreta-se que os resultados das frequências naturais obtidos por simulação via *MEF* não conseguem ser retratados de forma tão realista quanto os de dentro do plano, mesmo com os 64 elementos ao longo do comprimento e dos  $10 \times 10$  elementos<sup>1</sup> na secção comuns em todos os casos. Não obstante, é de ter em atenção que o valor de erro para este movimento, poucas vezes ultrapassa o valor de 5% nas três vigas.

Quanto à viga que menor erro apresenta entre resultados do modelo analítico e do modelo numérico no movimento dentro do plano, a Viga 3 e principalmente a Viga 2, destacam-se por ter um erro muito pouco significativo nem chegando a 0,1%. Fazendo a mesma análise para o movimento fora do plano a viga a destacar é a Viga 3, pouco ultrapassando os 1%.

Uma questão que merece ser focada é a de que para as vigas 1 e 2, onde na prática são a mesma viga mas com curvaturas diferentes, o valor de erro relativo para a ressonância *R4* aumenta subitamente com a diminuição do ângulo de abertura (para  $180^\circ$ ), remetendo-se este fenómeno ao que aconteceu com a família de modos desta viga de secção rectangular na secção Viga Recta que aparentava apresentar sucessivos problemas com a quarta frequência natural à medida que o ângulo de abertura se diminuía, em oposição à viga de secção circular que nenhum problema apresentou nesse sentido.

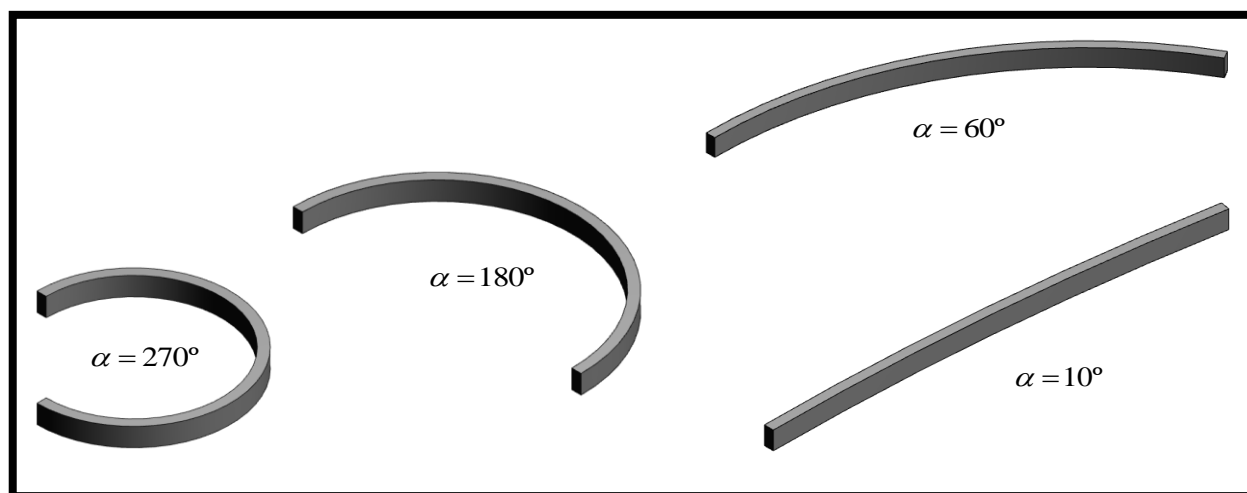
Portanto comprovou-se que existe uma concordância entre os dados da via computacional obtidos pelo modelo analítico e pelo modelo numérico.

---

<sup>1</sup> Na Viga de secção circular foram utilizados 10 elementos radiais por 10 elementos tangenciais

## 3.2 Validação Modelo - Estudo Tipo 2

Com o código desenvolvido anteriormente no Estudo Tipo 1 o resultado obtido é a resposta em frequência de uma viga de parâmetros materiais e geométricos fixos. Contudo, o código foi versatilizado de forma a que fosse possível um Estudo Tipo 2, que representasse as primeiras quatro frequências naturais de uma viga com comprimento fixo variando o seu ângulo abertura (logo o seu raio de curvatura) numa gama escolhida pelo utilizador, resultando uma representação gráfica das quatro frequências naturais em função da curvatura da viga.



**Fig. 19 – Vigas com diferentes Ângulos de Abertura**

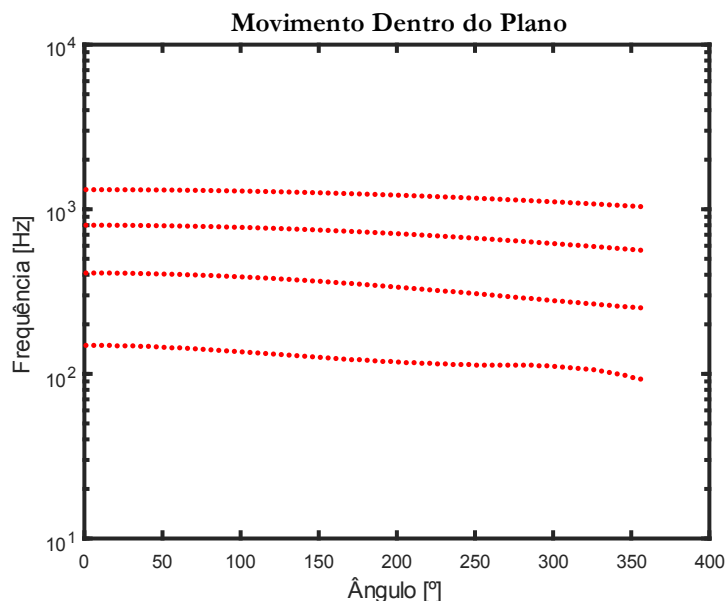
Como exemplo prático do que é a alteração do ângulo de abertura neste tipo de estudo 2, observe-se a Fig. 19 e note-se a configuração da viga para diferentes valores do ângulo de abertura. Portanto no Estudo Tipo 2, para cada curvatura visível na Fig. 19, o programa faria a pesquisa das primeiras quatro frequências naturais e representá-las-ia graficamente.

Defina-se então família de modos como o conjunto de pontos (ou curva) que contem traduzem as frequências naturais associadas ao mesmo comportamento modal em termo de simetria. Pode-se ter nas seguintes figuras aquilo que são os resultados deste Estudo Tipo 2 para uma viga de secção rectangular de  $0.754m$  de comprimento.

Assim, para cada ângulo são obtidos os valores das primeiras 4 frequências naturais da viga de secção rectangular desde ângulos próximos de  $0^\circ$  até  $360^\circ$ , para o movimento fora do plano (Fig. 22), movimento dentro do plano, não contabilizando o efeito da extensão da linha central (Fig. 20) e contabilizando este efeito (Fig. 21).

### 3.2.1 Família de Modos - Dentro do Plano

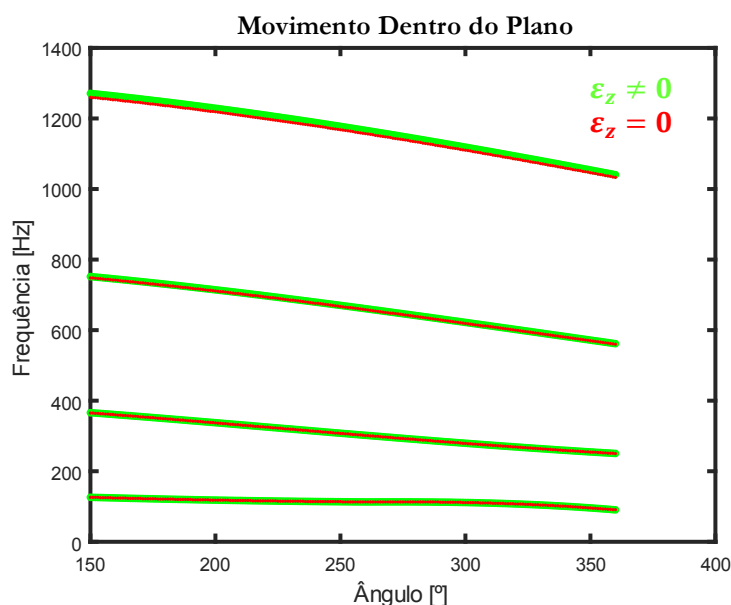
Veja-se que as curvas que representam as famílias de modos do caso dentro do plano contêm as primeiras, segundas, terceiras ou quartas frequências naturais, notando-se que a distribuição dos pontos de frequência natural é feita regularmente.



**Fig. 20 – Resultado Estudo Tipo 2 Mov. Dentro do Plano**

Para os movimentos dentro do plano, tem-se digamos, curvas de famílias de modos bastante regulares na medida em que pouco variam o seu declive nesse intervalo angular, sugerindo assim que os modos de vibração se manifestam com 2 3 4 5 nodos respectivamente, e é o que realmente se verifica no caso das vigas rectas. Pode ser adiantado que estas quatro famílias de modos para este tipo de movimento parecem respeitar certas leis de comportamento nomeadamente quanto à  $n$  ésima frequência natural em que de facto frequências naturais ímpares correspondem a modos de vibração simétricos e frequências naturais pares correspondem a modos de vibração antissimétricos sendo que cada modo de vibração tem o valor da  $n$  ésima frequência natural com a adição de 1, nodos.

Foi adiantado este resultado precocemente porque este tipo de movimento não trás grande surpresa, sendo facilmente este movimento generalizado pela “lei” das vigas rectas e assim sendo, o trabalho vai incidir no movimento fora do plano, caso esse em que as curvas têm um aspecto diferente.



**Fig. 21 – Resultado Estudo Tipo 2 sobreposição do efeito  $\varepsilon_z \neq 0$  e  $\varepsilon_z = 0$**

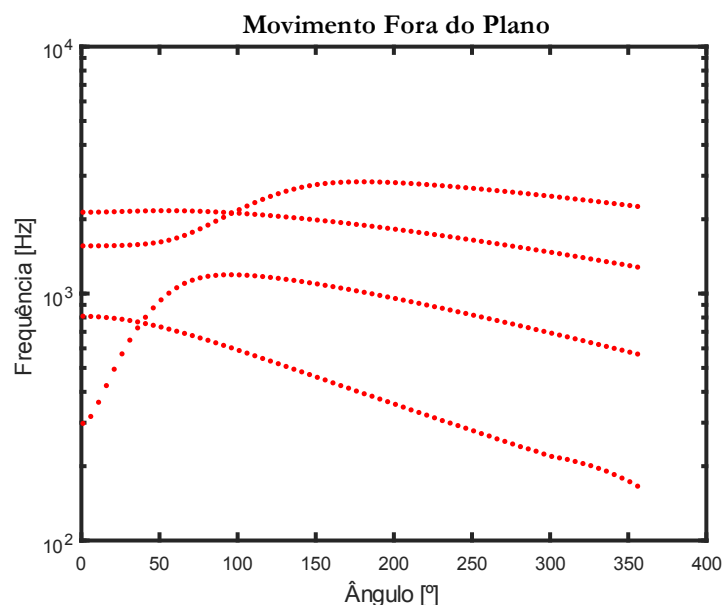
O gráfico apresentado na Fig. 21 sobrepõe os resultados das curvas de frequência natural do movimento dentro do plano anteriores com os resultados do mesmo tipo de movimento mas contabilizando o efeito da extensão da linha central. A gama de ângulo de abertura inicia-se em 150° e não em valores próximos de 0° o que se justifica com o facto de não se conseguir obter resultados<sup>1</sup> devido a perturbações no programa ao efectuar cálculos com raios de curvatura dessa ordem, contabilizando os efeitos de inércia rotatória, deformação devida ao esforço transversal e efeito da extensão da linha central.

Discutindo-se a sobreposição dos resultados, é visível que os resultados são praticamente idênticos quase não havendo distinção entre as curvas de cor vermelha e verde, o que de facto é sinal que apesar do peso de cálculo que é contabilizar todos os efeitos, os resultados estão de acordo com o pretendido. Contudo, com uma visualização mais atenta, pode ser observada uma ligeira inflação dos resultados que contabilizam os efeitos mencionados o que faz sentido na medida em que é contabilizada mais uma energia.

<sup>1</sup> É até possível obter resultados para ângulos abaixo dos 150° neste estudo em particular, implicando a mudança tipo de *FRF*, sendo que neste caso foi sempre utilizada a *FRF* directa na posição 1,1 da Matriz Receptância

### 3.2.2 Família de Modos - Fora do Plano

O aspecto do resultado do Estudo Tipo 2 para o movimento fora do plano, como visível na Fig. 19 apresenta características peculiares em oposição ao resultado anterior e é sobre este movimento que incidirá o estudo para se tentar decifrar o que traduz este comportamento em termos de modos de vibração quanto à sua simetria e número de nodos com auxílio posteriormente de métodos numéricos.



**Fig. 22 – Resultado Estudo Tipo 2 Mov. Fora do Plano**

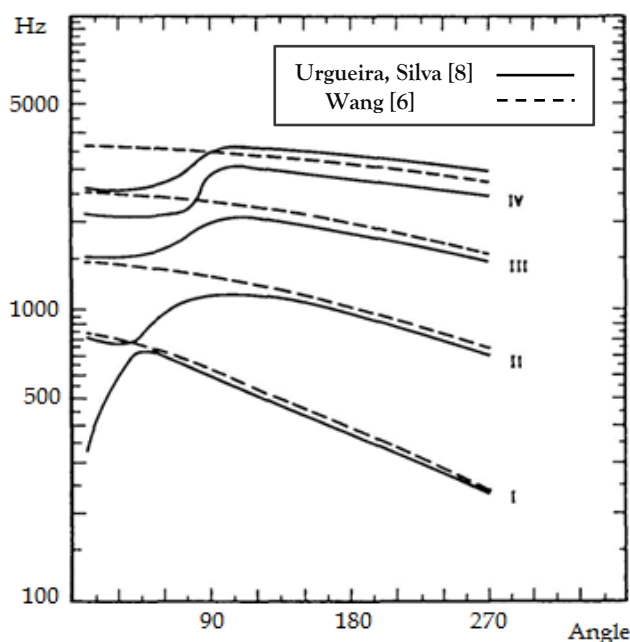
Quando o estudo é direccionado para o movimento fora do plano no qual algumas curvas apresentam mudanças de declive e ainda para mais, os graus de liberdade envolvidos neste movimento podem manifestar-se de forma diferente do caso do movimento dentro do plano. Explicando melhor, no primeiro caso Fig. 20 acontece que existe uma dependência entre as componentes<sup>1</sup> quando o movimento acontece, pois a deformação da viga dentro do plano acontece radialmente e tangencialmente, o que implica um acoplamento dos movimentos em  $u$  e  $w$  o que inevitavelmente obriga à rotação da secção transversal havendo sintonia entre os graus de liberdade de translação  $u, w$  e  $\phi_y$  havendo Hoppe [1] feito também a observação desse facto.

Quanto ao movimento fora do plano, entra-se num contexto diferente pois a única dependência notada e apenas por senso comum, é a do movimento em  $v$  com a rotação  $\phi_x$  pois não é evidente que a viga consiga flectir devido a  $v$  sem rodar a sua secção em torno de  $x$ . Já o movimento segundo  $\phi_z$  (associado a torção), em nada está relacionado com  $\phi_x$  mas levantando a dúvida se em algo se relaciona com o movimento em  $v$ .

<sup>1</sup> Ver graus de liberdade activos na Fig. 3 da pág. 9 para ambos os tipos de movimento

No trabalho anterior [7] foi contestada a teoria de Wang que obteve resultados diferentes nestas curvas pelo facto de ter excluído o efeito da inércia rotatória e observando a Fig. 23, é impressionante notar a diferença que existe entre contabilizar o efeito mencionado e desprezá-lo, principalmente para frequências naturais de ordem superior.

Contudo, a expectativa da aparência das curvas de famílias de modos, como vendo nessa mesma figura, era diferente à que foi presentemente obtida na Fig. 22 com o programa computacional, tendo ambos os gráficos um aspecto qualitativo semelhante após os 100° apenas falhando na questão do cruzamento das curvas.



**Fig. 23 – Comparação entre modelos analíticos**

Admite-se que os investigadores que tentaram a representaram estas curvas, fizeram-no com um número insuficiente de pontos junto às intersecções, que agora se demonstrou ocorrerem e que resultam numa interpretação diferente quanto a estas famílias de modos.

Esta situação pode ser clarificada com Estudo Tipo 2 uma vez que regulada a sua gama de ângulo de abertura com um passo suficientemente refinado pode resultar numa representação “contínua<sup>2</sup>”, sendo clarificada a variação das frequências de ressonância com a variação do ângulo de abertura obtendo-se o resultado da Fig. 22.

<sup>2</sup> Toma-se como representação contínua um conjunto de pontos tal forma denso que seja indistinguível a representação pontual de uma curva contínua como será visto em figuras da mesma natureza adiantemente

### 3.2.3 Convergência - Modelo Viga Recta

Foi feita anteriormente uma comparação dos resultados obtidos pelo modelo computacional com os resultados obtidos via experimental e é notável que o modelo apresenta um bom grau de fiabilidade nos resultados para aplicações práticas em engenharia. Esta fiabilidade pode ser ainda mais testada levando o estudo das frequências naturais literalmente ao limite para ângulos de abertura próximos de  $0^\circ$ , implicando inevitavelmente à aproximação da viga recta, em consequência da diminuição extrema da curvatura para que o comprimento se conserve, pretendendo-se avaliar a proximidade destes valores com os valores de frequência ressonância de um modelo de viga recta equivalente.

Nesta secção o objectivo é apresentar um estudo onde ambos os tipos de movimento são “forçados” a convergir para o modelo de viga recta comum a ambos os movimentos sendo feita esta através de vigas com a secção disposta da mesma forma para ambos os tipos de movimento e com a diminuição de curvatura extrema para valores próximos de  $0^\circ$ .

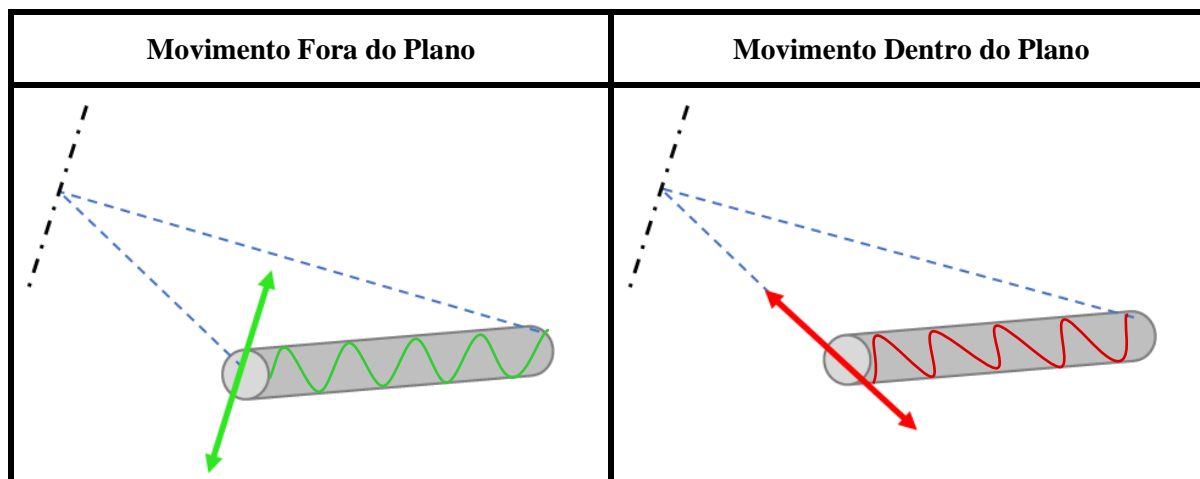
É fundamental a compreensão da ideia pretendida para a compreensão deste estudo de convergência. Exemplificando com a Fig. 24 de uma viga com secção circular, será intuitivo pensar que uma viga curva “rectificada” exibirá as mesmas frequências naturais quer o movimento de estudo seja para o movimento fora, ou dentro do plano pois a secção tem as mesmas características quanto ao seu momento de inércia em ambos os movimentos. Analogamente, para uma viga de secção quadrada tendida para uma viga reta, na Fig. 25, serão esperados os mesmos comportamentos modais em ambos os movimentos, desde que, a sua secção ofereça a mesma rigidez à flexão<sup>3</sup>. Assim, para este tipo de secção garante-se essa condição se a secção for rodada  $180^\circ$  entre os dois tipos de movimento estudados.

---

<sup>3</sup> Apenas são esperados modos associados à flexão para uma viga aproximadamente recta

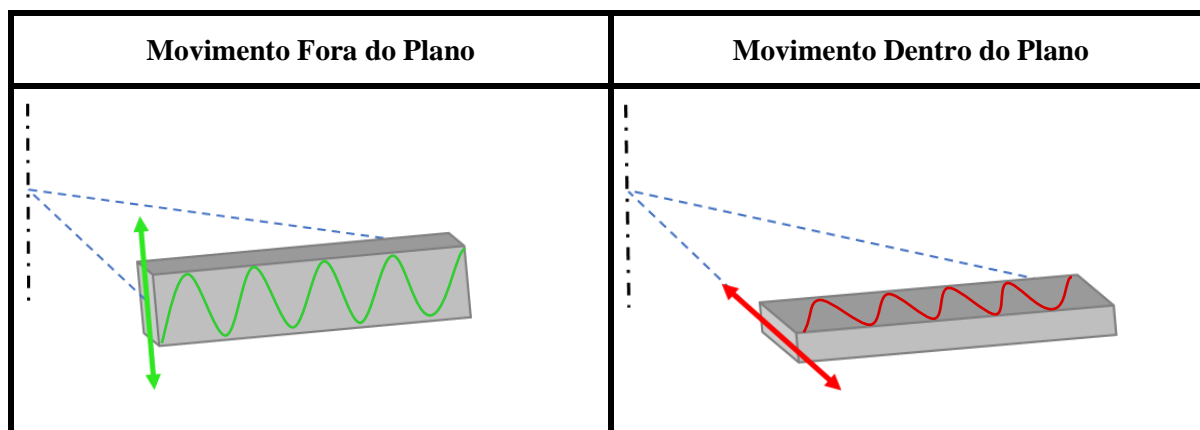


Para o caso da viga com secção circular, na forma de ilustração na Fig. 24, é tida uma viga aproximadamente recta que se espera que exiba os mesmos valores de frequência natural para ambos os movimentos, fora e dentro do plano de curvatura, respectivamente:



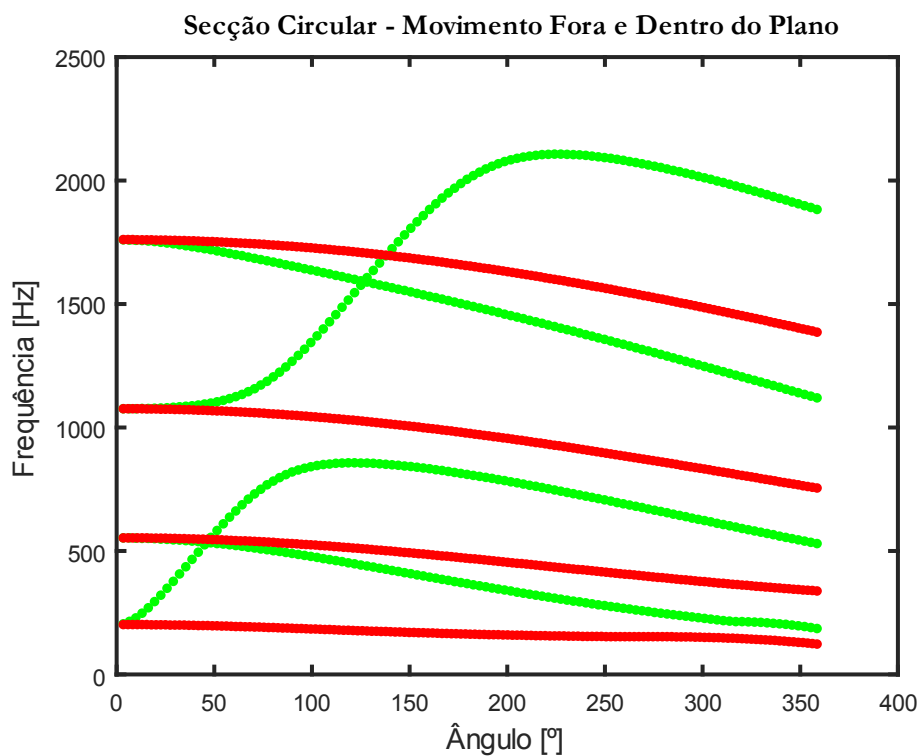
**Fig. 24 – Mov. Fora e Dentro do Plano de uma viga aproximadamente recta (secção circular)**

Para o caso da viga com secção rectangular da Fig. 25, serão também esperados os mesmos valores de frequências naturais para a seguinte configuração:



**Fig. 25 – Mov. Fora e Dentro do Plano de uma viga aproximadamente recta (secção rectangular)**

Nas figuras seguintes serão sobrepostos dois resultados do Estudo Tipo 2 sendo os resultados as famílias de modos para os movimentos de dentro (vermelho) e fora do plano (verde) para uma gama de 0 a 360 graus. Figuras essas acompanhadas das tabelas que contêm os valores dos primeiros modos calculados via computacional (Modelo desenvolvido) e via Teórica Analítica da viga recta. Estas quatro frequências foram calculadas para valores de ângulos de abertura (abscissas) cada vez mais próximos de 0, começando em 10° reduzindo-se para metade 5°, para 1° e para um décimo deste último.



Viga $\alpha$	1ª Freq. Natural			2ª Freq. Natural			3ª Freq. Natural			4ª Freq. Natural		
	Comp. (Hz)	Teo. (Hz)	Erro (%)	Comp. (Hz)	Teo. (Hz)	Erro (%)	Comp. (Hz)	Teo. (Hz)	Erro (%)	Comp. (Hz)	Teo. (Hz)	Erro (%)
10º	230,3	202,3	13,9	552,0	557,5	1,0	1076,0	1092,9	1,5	1758,0	1806,7	2,7
5º	209,2		3,4	552,7		0,9	1076,0		1,5	1760,0		2,6
1º	202,0		0,1	552,9		0,8	1076,0		1,5	1760,0		2,6
0,1º	201,7		0,3	552,9		0,8	1076,0		1,5	1760,0		2,6

Tabela 11 – Resultados Modelo Comp. com  $\alpha \approx 0$  – Resultados Teóricos Viga Recta

**Qualitativamente:**

Verifica-se que as famílias de modos de ambos os tipos de movimento convergem para os mesmos valores com a diminuição do ângulo de abertura (aumento do raio de curvatura) para um valor que à priori se diria o de frequência natural da viga recta. É interessante notar que a convergência acontece a “ritmos” diferentes na medida em que a convergência para a primeira frequência natural tarda em acontecer relativamente às restantes, o que se pode verificar quando comparando com a 2ª frequência natural que a olho nu inicia a sua convergência para valores decrescentes a partir dos 50°.

**Quantitativamente:**

É possível verificar que com a diminuição do ângulo de abertura, os valores diminuem o seu erro relativo em relação ao valor da frequência natural teórica com excepção da primeira frequência natural. Observando o gradiente deste erro com o decréscimo do ângulo de abertura, este gradiente é pouco acentuado para as 3 frequências naturais além da primeira. Indicando esse gradiente do erro que a aproximação dos valores do modelo computacional aos valores teóricos da viga recta, são mais notáveis para cada valor de redução de ângulo.

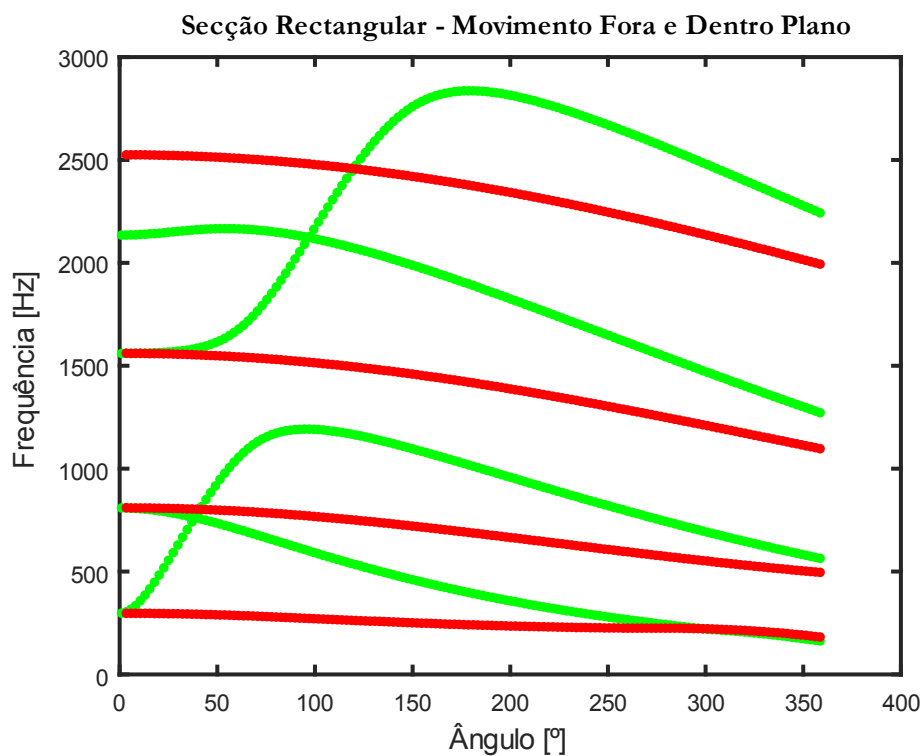


Fig. 27 – Convergência para Modelo Teórico Viga Recta

Viga $\alpha$	1ª Freq. Natural			2ª Freq. Natural			3ª Freq. Natural			4ª Freq. Natural		
	Comp. (Hz)	Teo. (Hz)	Erro (%)	Comp. (Hz)	Teo. (Hz)	Erro (%)	Comp. (Hz)	Teo. (Hz)	Erro (%)	Comp. (Hz)	Teo. (Hz)	Erro (%)
<b>10º</b>	352,4	298,9	17,9	805,7	824,0	2,2	1361,0	1615,4	15,7	2137,0	2670,3	20,0
<b>5º</b>	311,8		4,3	808,3		1,9	1560,0		3,4	2135,0		20,0
<b>1º</b>	297,6		0,4	809,1		1,8	1560,0		3,4	2135,0		20,0
<b>0,1º</b>	297,0		0,6	809,1		1,8	1560,0		3,4	2535,0		5,1

Tabela 12 – Resultados Modelo Comp. com  $\alpha \approx 0$  – Resultados Teóricos Viga Recta


### Qualitativamente:

Tal como na Viga 3 é nota-se que 3 famílias de modos de ambos os tipos de movimento convergem para os mesmos valores com a diminuição do ângulo de abertura (aumento do raio de curvatura), para os supostos valores de frequência natural da viga recta mas de secção circular. Também a convergência acontece a “ritmos” diferentes na medida em que a convergência para a primeira frequência natural tarda em acontecer relativamente às restantes, o que se pode verificar quando comparando com a 2ª e 3ª frequência natural que a olho nu inicia a sua convergência para valores decrescentes a partir dos 50°. A análise descrita foi comum ao caso anterior (viga de secção circular) até ao momento que faz a interpretação da 4ª frequência natural, pois a tal convergência que confiantemente era esperada, não se realiza notando-se facilmente, que as famílias de modos de cada tipo de movimento, divergem cada uma para seu valor.

### Quantitativamente:

É possível verificar que com a diminuição do ângulo de curvatura, os valores diminuem o erro relativo em relação ao valor da frequência natural teórica com excepção da 1ª Freq. Natural. Observando o gradiente deste erro com o decréscimo do ângulo de abertura, este é menos acentuado para a 2ª Freq. Natural, sendo mais notável para a redução de 10° para 5° nas primeiras 3 frequências naturais.

A 4ª Freq. Natural tem um valor de erro que aponta para os 20% que provavelmente se deve a uma falha de modelo em que para uma quarta frequência natural com raios de curvatura superiores a 5 metros o modelo começa a ter desvios significativos daquilo que é a teoria da viga recta. Mudando-se os valores de referência do modelo computacional, verifica-se que de facto o movimento dentro do plano garante valores que convergem para o modelo da viga recta, como se segue na Tabela 13.

Viga  $\alpha$	4ª Freq. Natural		
	Comp <sup>1</sup> . (Hz)	Teo. (Hz)	Erro (%)
10º	2525,0	2670,3	5,4
5º	2525,0		5,4
1º	2525,0		5,4
0,1º	---- <sup>2</sup>		----

**Tabela 13 – Valores Computacionais Mov. Dentro do Plano-4ª FN**

<sup>1</sup> . Uma vez que os valores referência do Modelo Computacional são os correspondentes ao movimento fora do plano, na Tabela 12 este valor referência passa a estar associado ao movimento dentro do plano na Tabela 13

<sup>2</sup> Este ângulo de abertura está associado um raio de curvatura de 432 metros, tornando-se difícil o cálculo

### 3.2.3.1 Discussão de Resultados

Para uma primeira frequência natural das duas vigas os valores de ressonância tardam a convergir, em relação às restantes frequências naturais, mas a convergência dá-se com mais precisão até ao ângulo de  $1^\circ$  havendo um aumento ligeiro do erro relativo para o ângulo de  $0,1^\circ$  em ambas as vigas.

Seguindo-se para a segunda e a terceira frequência natural os erros tenderam a diminuir com a diminuição do ângulo de abertura ou a manter-se até em alguns casos, não havendo aumento de erro para o ângulo limite de  $0,1^\circ$  como aconteceu com a primeira frequência de ressonância.

Particularizando para a 4ª frequência natural da viga com secção rectangular, esta manifesta valores diferentes não havendo uma convergência de valores, mas sim uma divergência entre os dois tipos de movimento o que não era expectável havendo indícios de inconsistência do modelo nestas condições. Interpreta-se assim como valor correcto o correspondente ao movimento de dentro do plano devido ao facto de este apresentar um erro substancialmente menor que o erro do movimento fora do plano relativamente ao modelo teórico da viga recta como apresentado na Tabela 13.

Ainda que tenha havido problemas, daqui pode interpretar-se que a componente de análise de movimento fora do plano, pode gerar problemas para frequências naturais acima dos  $2000\text{ Hz}$  uma vez que não houve esse problema para a 4ª frequência natural da viga de secção circular, a origem da causa desse problema pode, possivelmente, dever-se ao factor  $R/h$ .

Poderia permanecer até mesmo a dúvida se para a quarta frequência natural de valores de ângulos superiores aos de  $10^\circ$  seriam fidedignos caso não se tivesse verificado na secção Validação Modelo – Estudo Tipo 1 a semelhança de valores das quartas ressonâncias do modelo computacional relativo aos ensaios experimentais, tendo-se avaliado a sua validade.

A aplicação do modelo para valores de angulares muito reduzidos, ( $0,1^\circ$ ), pode tornar-se em aproximações mais grosseiras que os restantes ângulos (ainda assim perfeitamente válidas) devido a erros numéricos associados aos valores matriciais muito próximos de zero implicados pelos cálculos com raios de curvatura grandes o suficiente para gerar “conflitos” numéricos na subrotina encarregue da inversão de matrizes do programa, pois é de recordar que uma viga com  $0,1^\circ$  de abertura com  $0,754$  metros de comprimento, o raio de curvatura atinge um valor superior a  $400$  metros, o que para uma altura de secção milimétrica, tem grande impacto no factor  $R/h$ .

O modelo desenvolvido, como qualquer modelo, tem o seu campo de validade sendo este ultrapassado nas condições anteriormente referidas, que na prática são casos muito extremos, uma vez que se tratam de frequências acima dos 2000  $Hz$ , havendo grande precisão para frequências abaixo desta última, sublinha-se. Não obstante, os valores obtidos utilizando a componente movimento dentro plano para este tipo de estudo de convergência, parecem não acusar qualquer problema uma vez que convergiu sempre para um total de 8 frequências naturais de viga recta.

Com o estudo realizado nesta secção, passa-se a redundância, que o objectivo era fazer-se um estudo quanto à consistência do modelo e de qual o limite dessa consistência, sendo notável que para as vigas com  $10^\circ$  de abertura os resultados são razoáveis no geral dos casos. Reduzindo o ângulo a metade, isto é para  $5^\circ$ , os resultados passam de razoáveis a óptimos e quando o ângulo é reduzido a  $1^\circ$  os resultados de óptimos passam a excelentes, conseguindo-se valores de erro abaixo de 1% (chegando mesmo aos 0,1%) o que nos dá uma aproximação fantástica ao modelo da viga recta, revelando-se se assim este modelo uma poderosa ferramenta até mesmo para uma análise de vigas rectas ainda que não seja esse o seu propósito.

### 3.3 Validação Via *M.E.F* dos Ângulos $\alpha$ de Referência

No estudo da secção anterior de simulação foi confirmado que os resultados do modelo via *MEF* se conciliam com os do modelo computacional criado, dando alguma segurança para a progressão do estudo, tornando-se o objectivo a cumprir nesta secção a validação de alguns valores das curvas dadas pelo Estudo Tipo 2 (onde está inevitavelmente contemplado o Estudo Tipo 1), na medida em que será estudada a viga de secção rectangular recolhendo-se os valores das quatro primeiras frequências de ressonância de ambos os movimentos para vários ângulos de abertura, correspondendo assim a vários pontos das curvas onde estão contidas as famílias de modos, utilizando os ângulos de abertura de 10° 60° 180° 270°, usando-se o contexto de simulação numérica *MEF* para se gerar esses resultados.

Estes quatro valores de ângulo foram escolhidos com o critério de se estudar ângulos de abertura<sup>3</sup> antes e após do cruzamento das linhas que representam as famílias de modos diferentes, verificando-se a precisão dos seus valores para vários pontos das famílias de modos, comparando-se esses resultados originados da simulação, com os obtidos com o modelo desenvolvido, ambos auxiliados com o erro, medindo assim o seu desvio.

---

<sup>3</sup> Lembra-se ao leitor que o aumento do ângulo de abertura desde 10° a 270°, traduz-se fisicamente no aumento da curvatura da viga, uma vez que o comprimento da mesma se conserva



Os resultados serão vistos primeiramente na sua totalidade na Tabela 14 e em seguida individualmente para cada um dos ângulos de abertura, acompanhados com a figura da respectiva viga com a malha<sup>1</sup> aplicada. Os valores estão organizados de forma crescente com o seu valor de ressonância.

10 Graus				60 Graus			
<b>Tipo Mov.</b>	<b>ANSYS</b> (Hz)	<b>MatLab</b> (Hz)	<b>Erro</b> (%)	<b>Tipo Mov.</b>	<b>ANSYS</b> (Hz)	<b>MatLab</b> (Hz)	<b>Erro</b> (%)
D1	149,05	150	0,6	D1	143,72	144	0,2
F1	328,41	352	7,2	D2	402,07	403	0,2
D2	409,85	410	0,04	F1	699,53	707	1,1
D3	800,12	801	0,1	D3	791,52	792	0,1
F2	805,06	806	0,1	F2	841,17	1047	24,5
F3	1559,1	1561	0,1	D4	1306,1	1307	0,1
D4	1315,1	1316	0,1	F3	1576	1671	6,0
F4	1587,1	2137	34,6	F4	2545,6	2165	15,0

180 Graus				270 Graus			
<b>Tipo Mov.</b>	<b>ANSYS</b> (Hz)	<b>MatLab</b> (Hz)	<b>Erro</b> (%)	<b>Tipo Mov.</b>	<b>ANSYS</b> (Hz)	<b>MatLab</b> (Hz)	<b>Erro</b> (%)
D1	120,94	121	0,05	D1	112,57	113,2	0,6
D2	348,35	349	0,2	F1	252,45	253,6	0,5
F1	391,66	395	0,9	D2	295,37	295,6	0,1
D3	726,11	727	0,1	D3	647,7	648,5	0,1
F2	986,45	1014	2,8	F2	755,3	767,9	1,7
D4	1235,1	1236	0,1	D4	1143,9	1146	0,2
F3	1795	1893	5,5	F3	1526,6	1577	3,3
F4	2477,1	2836	14,5	F4	2452,6	2597	5,9

**Tabela 14 – Frequências naturais dentro e fora do plano para 4 ângulos de abertura**

Foram assim obtidos resultados<sup>2</sup> com o ANSYS e com o Modelo Computacional (*MatLab*) e feita a devida quantificação do erro relativo.

<sup>1</sup>A secção é do tipo rectangular, como a Viga 1 e 2; As vigas têm os mesmos elementos que na secção 3.1.4

<sup>2</sup> A frequência natural está associada ao tipo de movimento D(entro) ou F(ora) associada à 1,2,3,4 ésimas frequência natural do seu tipo de movimento

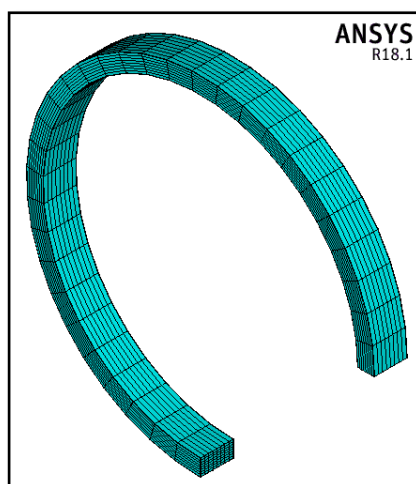
## Viga com Ângulo de Abertura 270 Graus

$$\alpha = 270^\circ$$

<b>Tipo Mov.</b>	<b>ANSYS</b> (Hz)	<b>MatLab</b> (Hz)	<b>Erro</b> (%)
<i>D1</i>	112,57	113,2	0,6
<i>F1</i>	252,45	253,6	0,5
<i>D2</i>	295,37	295,6	0,1
<i>D3</i>	647,7	648,5	0,1
<i>F2</i>	755,3	767,9	1,7
<i>D4</i>	1143,9	1146	0,2
<i>F3</i>	1526,6	1577	3,3
<i>F4</i>	2452,6	2597	5,9

Tabela 15 – Comparação valores via *MEF* com modelo computacional  $\alpha = 270^\circ$ 

Esta viga representa identicamente o que é a Viga 1, sendo o seu aspecto em simulação dado pela Fig. 28 cujos valores do modelo computacional já foram obtidos anteriormente, estando agora organizados de maneira diferente. Analisando-se os resultados, é observável que os resultados são de grande grau de semelhança, sendo os valores mais discrepantes associados aos dois últimos modos do movimento fora do plano *F3* e *F4*.

Fig. 28 – Malha aplicada a viga com  $\alpha = 270^\circ$ 

## Viga com Ângulo de Abertura 180 Graus

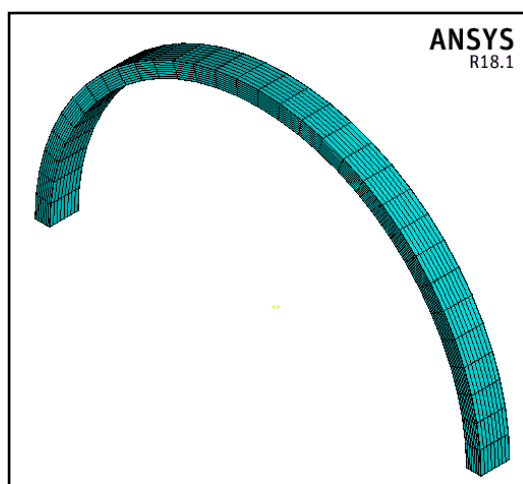
$$\alpha = 180^\circ$$

<b>Tipo Mov.</b>	<b>ANSYS</b>	<b>MatLab</b>	<b>Erro</b>
	(Hz)	(Hz)	(%)
<i>D1</i>	120,94	121	0,05
<i>D2</i>	348,35	349	0,2
<i>F1</i>	391,66	395	0,9
<i>D3</i>	726,11	727	0,1
<i>F2</i>	986,45	1014	2,8
<i>D4</i>	1235,1	1236	0,1
<i>F3</i>	1795	1893	5,5
<i>F4</i>	2477,1	2836	14,5

Tabela 16 – Comparação valores via *MEF* com modelo computacional  $\alpha = 180^\circ$ 

Esta viga representa identicamente o que é a Viga 2, cujos valores do modelo computacional também já foram obtidos anteriormente.

Analisando os resultados é de notar a semelhança de resultados obtidos pelas duas vias que, neste caso, frequentemente estão abaixo dos 1% sendo o movimento fora do plano que indica mais altos valores de erro. Repara-se que os dois maiores valores de erro correspondem a *F3* e *F4* tal como no caso da viga anterior com ângulo de  $270^\circ$  de abertura, que no presente caso são superiores aos anteriores.

Fig. 29 – Malha aplicada a viga com  $\alpha = 180^\circ$ 

## Viga com Ângulo de Abertura 60 Graus

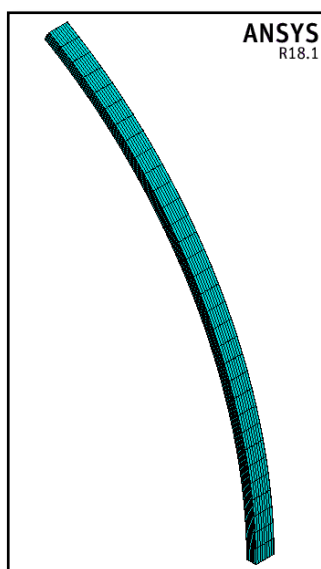
$$\alpha = 60^\circ$$

<b>Tipo Mov.</b>	<b>ANSYS</b> (Hz)	<b>MatLab</b> (Hz)	<b>Erro</b> (%)
<i>D1</i>	143,72	144	0,2
<i>D2</i>	402,07	403	0,2
<i>F1</i>	699,53	707	1,1
<i>D3</i>	791,52	792	0,1
<i>F2</i>	841,17	1047	24,5
<i>D4</i>	1306,1	1307	0,1
<i>F3</i>	1576	1671	6,0
<i>F4</i>	2545,6	2165	15,0

Tabela 17 – Comparação valores via *MEF* com modelo computacional  $\alpha = 60^\circ$ 

Analisando este ângulo de abertura, a viga começa a tomar aspecto de uma “viga recta” ligeiramente encurvada, onde o parâmetro  $R/h$  poderá começa a sofrer alterações significativas uma vez que para este ângulo o raio terá de ser o triplo do anterior (0,72m) para manter o comprimento da viga aumentando assim os seus valores de erro face aos anteriores.

Ainda que o valor de erro se mantenha novamente abaixo dos 1% em alguns casos, é inegável o aumento do erro nomeadamente para ressonâncias no movimento fora do plano como a de *F3 F4* sendo as portadoras de maior erro e ainda *F2* neste caso.

Fig. 30 – Malha aplicada a viga com  $\alpha = 60^\circ$ 

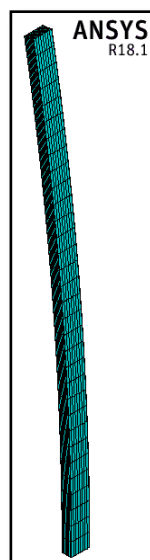
## Viga com Ângulo de Abertura 10 Graus

$$\alpha = 10^\circ$$

<b>Tipo Mov.</b>	<b>ANSYS</b> (Hz)	<b>MatLab</b> (Hz)	<b>Erro</b> (%)
<i>D1</i>	149,05	150	0,6
<i>F1</i>	328,41	352	7,2
<i>D2</i>	409,85	410	0,04
<i>D3</i>	800,12	801	0,1
<i>F2</i>	805,06	806	0,1
<i>F3</i>	1559,1	1561	0,1
<i>D4</i>	1315,1	1316	0,1
<i>F4</i>	1587,1	2137	34,6

Tabela 18 – Comparação valores via *MEF* com modelo computacional  $\alpha = 10^\circ$ 

Para este ângulo de abertura, a viga torna-se muito semelhante à viga recta, o que obriga, para um comprimento fixo, a um raio na gama dos 4 metros e o que por sua vez pode implicar um parâmetro  $R/h$  maior do que aquele que é admitido como hipótese no modelo. Contudo, pode ser observado que os valores de erro atingem alguns deles os 0,1%, chegando mesmo um deles a uma ordem de grandeza abaixo deste último (*D2*). Inesperadamente as frequências naturais *F2* e *F3* apresentaram uma significativa redução de erro tendo em conta o caso anterior. Porém, tal não aconteceu com a última frequência natural no movimento fora do plano *F4* que se acentua ainda mais no seu erro criando desconfiança quanto à validade deste resultado dado pelo modelo analítico uma vez que este caso é particularmente o que não converge para o valor da viga recta, como visto na secção 3.2.3.

Fig. 31 – Malha aplicada a viga com  $\alpha = 10^\circ$ 

### 3.3.1 Discussão de Resultados

Foi visto no quadro da Tabela 14 que, para as quatro curvaturas, os resultados simulados, no seu geral, concidem com pouco erro com os do modelo computacional. É de notar que os resultados se apresentam geralmente com um erro abaixo dos 1% o que dá uma perspectiva optimista quando se avalia a harmonia entre os valores obtidos pela via analítica e pela via numérica.

Porém existem aumentos de erro que se associam a movimentos fora do plano para frequências naturais mais elevadas de vigas com ângulos de abertura cada vez menores sendo um facto que o movimento fora do plano não consegue ser simulado com tanta precisão com elementos finitos relativamente ao movimento dentro do plano como se observa para as vigas (1 e 2) com ângulo de abertura de  $270^\circ$  e  $180^\circ$ . No entanto, outro factor a ter em conta é de que na secção Convergência – Modelo Viga Recta, verificou-se que para ângulos de abertura menores, a quarta frequência de ressonância para o movimento fora do plano se tendia a “desviar” do seu valor real induzindo assim altos valores de erro para os ângulos em questão.

O ANSYS gerou todos os valores de ressonância por ordem crescente não distinguindo qual o tipo de movimento associado. Contudo, foi possível a confirmação da correspondência entre as frequências de ressonância obtidas nessa simulação com o tipo de movimento que estas realizam graças à funcionalidade de animação do modo de vibração classificando assim o tipo de ressonância.

### 3.3.1 Vectores Modais – Movimento Fora do Plano

Nesta secção será feita a fusão entre os resultados analíticos do Estudo Tipo 2 e os resultados de simulação numérica revelando qual o comportamento modal em termos de vibração de uma viga curva<sup>1</sup>, nas suas primeiras quatro frequências naturais para diferentes ângulos de abertura<sup>2</sup> em movimentos fora do plano.

Estendendo o estudo anterior, acedeu-se aos vectores modais dados pelo *ANSYS* para com estes se fazer a representação dos vectores normalizados, para cada um dos 65 nós que se distribuem ordenadamente entre as duas extremidade da viga para cada uma dos três graus de liberdade.

Portanto, nas figuras seguintes será apresentado um estudo dos modos de vibração do movimento fora do plano, desvendando quais os vectores modais para cada uma das três componentes ortogonais deste tipo de movimento. Para cada componente é feita a sua representação modal com uma correspondência colorida dos modos em função do ângulo de abertura.

A representação modal é feita com gráficos tabelados abaixo das famílias de modos, que contêm o vector modal para cada um dos 65 nós da viga, gráficos esses intitulados com a componente em questão, numerados com o seu valor de frequência natural seguido do seu ângulo de abertura.

Nesta secção serão analisadas as famílias de modos antes e depois dos pontos de intersecção com outras curvas, quais os padrões de comportamento modal quantitativamente em cada família de modo e ainda qual a relação que existe entre as três componentes do movimento fora do plano quando a viga é excitada nos seus valores de frequência de ressonância. Sublinha-se que este estudo apenas incidirá no movimento fora do plano devido ao facto de os modos de vibração dentro do plano serem regulares e facilmente identificáveis, como se pôde observar na respectiva família de modos na Fig. 20.

---

<sup>1</sup> A viga curva é viga de secção rectangular analisada no estudo da secção que se antecede

<sup>2</sup> Uma vez que este estudo reaproveita os dados da secção anterior, os ângulos de abertura serão os mesmos

# Vectores Modais – Componente $v$

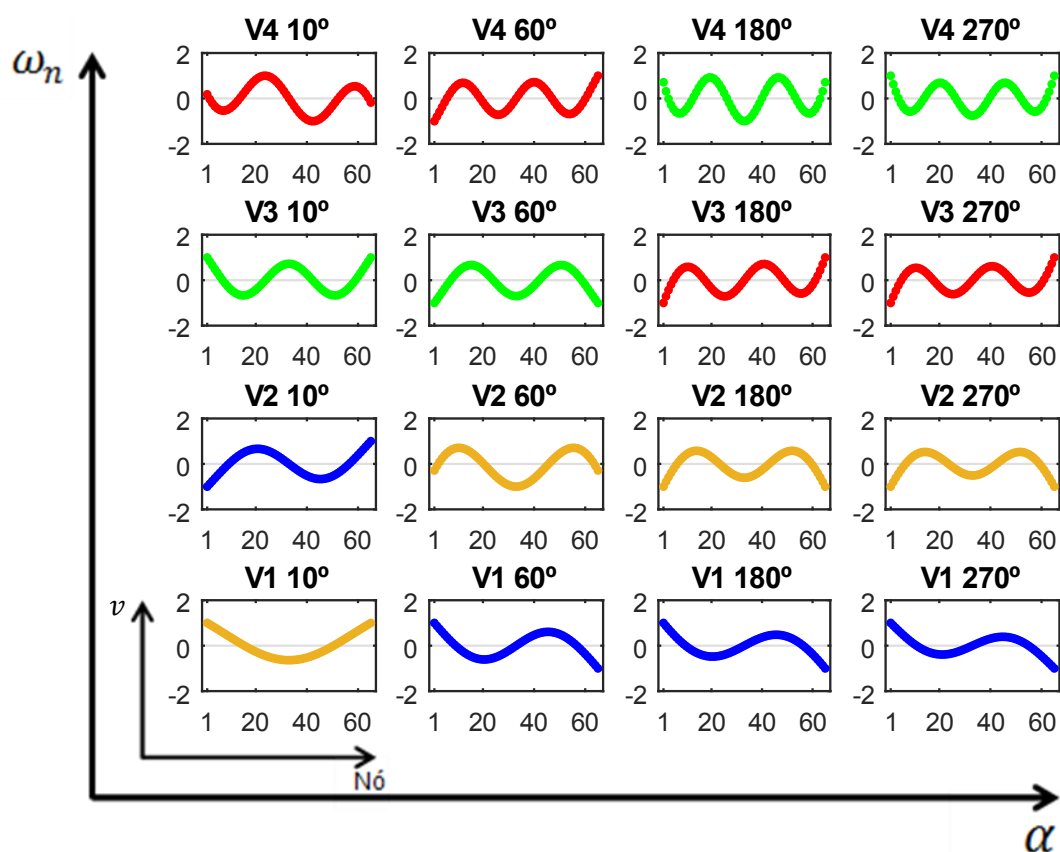
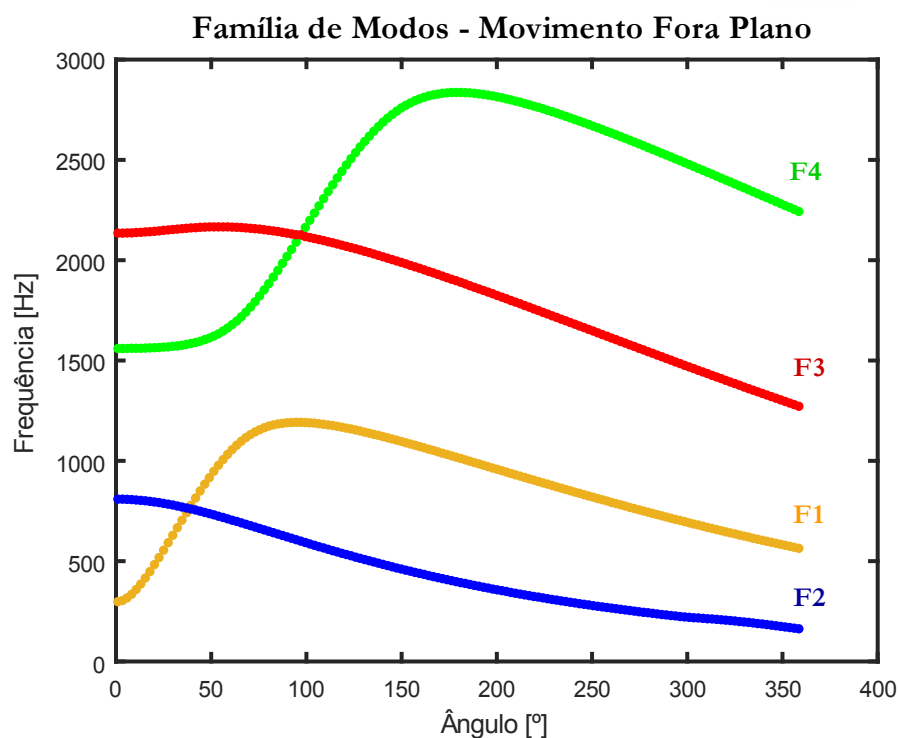
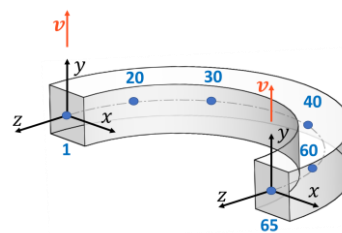


Fig. 32 – Família de Modos-Vectores Modais  $\mathcal{V}$



### **Família de Modos – F1**

Nesta família de modos, para um primeiro ângulo de abertura de  $10^\circ$  é de notar um comportamento modal **simétrico** com a presença de 2 nodos neste modo de vibração que muito se assemelha a um primeiro modo de vibração do modelo de viga recta.

Para os restantes ângulos acima dos  $10^\circ$ , ou seja, após o cruzamento com outra família de modos é observável a adição de mais dois nodos mantendo-se assim estes três últimos modos com 4 nodos e um comportamento **simétrico**.

### **Família de Modos – F2**

Nesta família de modos o comportamento modal geral apresenta **assimetria** de 3 nodos. Após a intersecção com outra família de modos apenas opõe o seu sentido de concavidade para os três últimos ângulos de abertura.

### **Família de Modos – F4**

Nesta família de modos, é de notar um comportamento modal **simétrico** no geral. Para os primeiros dois ângulos de curvatura de  $10^\circ$  e  $60^\circ$  nota-se a presença de 4 nodos nestes modos de vibração. Após a intersecção com outra família de modos há um acréscimo de dois nodos para os ângulos de  $180^\circ$  e  $270^\circ$  passando assim a 6 nodos mas mantendo a simetria.

### **Família de Modos – F3**

Nesta família de modos o comportamento modal geral apresenta **assimetria** de 5 nodos. Após a intersecção com outra família de modos apenas opõe o seu sentido de concavidade para os ângulos de  $180^\circ$  e  $270^\circ$ .

### **Interpretação:**

Observa-se que curvas de famílias de modos com gradiente positivo para valores próximos da intersecção, apresentam número par de nodos mantendo as suas simetrias após o ponto de intersecção com a adição de dois nodos. Quanto a curvas de gradiente negativo para valores próximos do ponto de intersecção, apresentam sempre um número ímpar de nodos e a sua assimetria para os restantes ângulos estudados.

# Vectores Modais – Componente $\phi_x$

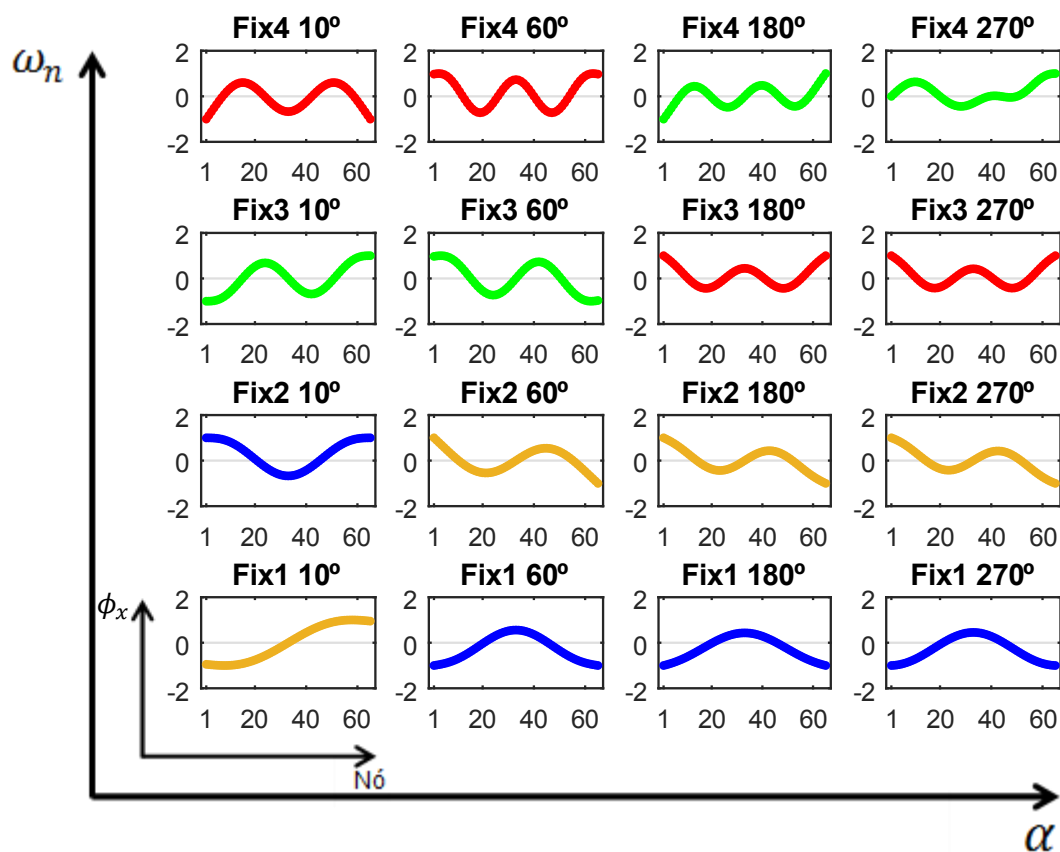
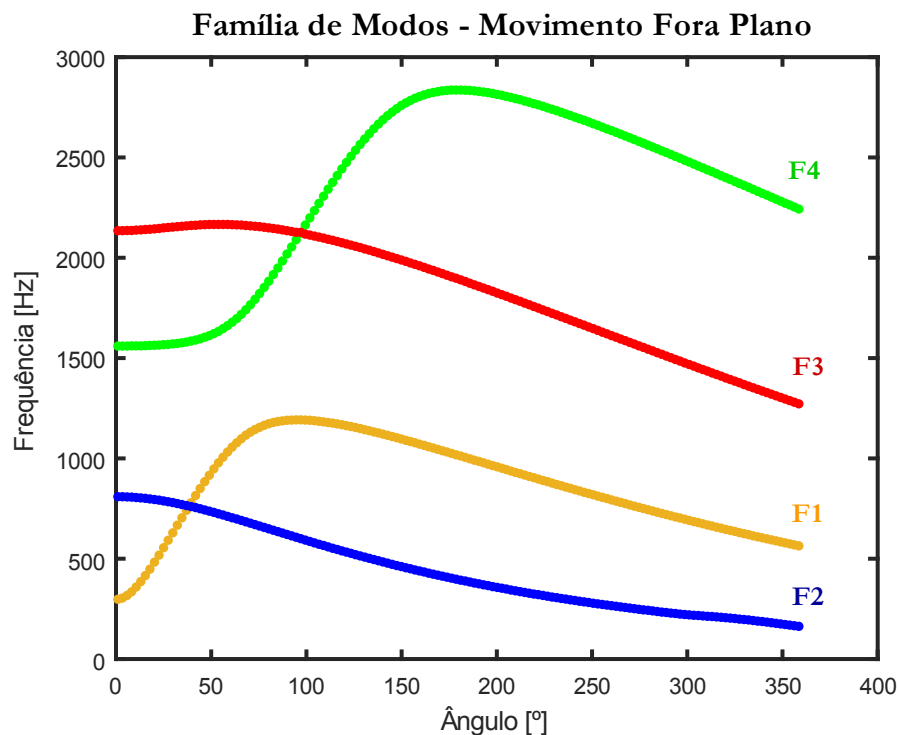
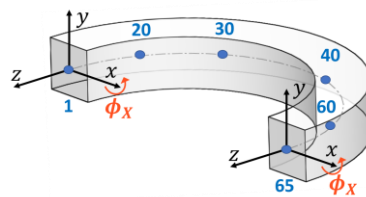


Fig. 33 – Família de Modos-Vectores Modais  $\phi_x$

### **Família de Modos – F1**

Nesta família de modos, para um primeiro ângulo de abertura de  $10^\circ$  é de notar um comportamento modal **assimétrico** com a presença de 1 nodo neste modo de vibração.

Para os restantes ângulos acima dos  $10^\circ$ , ou seja, após o cruzamento com outra família de modos é notável a adição de mais 2 nodos mantendo-se assim estes três últimos modos com 3 nodos, com um comportamento **assimétrico**.

### **Família de Modos – F2**

Nesta família de modos o comportamento modal geral apresenta **simetria** de dois nodos. Após a intersecção com outra família de modos apenas opõe o seu sentido de concavidade para os três últimos ângulos de abertura  $60^\circ$   $180^\circ$   $270^\circ$ .

### **Família de Modos – F4**

Nesta família de modos, é de notar um comportamento modal **assimétrico** no geral. Para os primeiros dois ângulos de curvatura de  $10^\circ$  e  $60^\circ$  nota-se a presença de 3 nodos nestes modos de vibração. Após a intersecção com outra família de modos há um acréscimo de dois nodos para os ângulos<sup>1</sup> de  $180^\circ$  e  $270^\circ$  passando assim estes modos a ter 5 nodos.

### **Família de Modos – F3**

Nesta família de modos o comportamento modal geral apresenta **simetria** de 4 nodos. Após a intersecção com outra família de modos apenas mantém oposição do seu sentido de concavidade verificada desde o ângulo de  $60^\circ$ .

### **Interpretação:**

O comportamento modal em termos de rotação  $\phi_x$  identifica-se com o de  $y$  estudado anteriormente na medida em que a adição de dois nodos existe para curvas que antes do ponto exibam um gradiente positivo. Curiosamente este resultado verifica oposição de simetria face ao caso anterior.

Esta oposição de simetrias em relação ao caso anterior prende-se com o facto de haver uma dependência entre as respostas das componentes anteriores, o que compreensivelmente se verifica dado que a rotação depende da flexão, sendo esta imposta pelo movimento segundo  $y$ .

---

<sup>1</sup> Na quarta frequência natural com ângulo de abertura de  $270^\circ$  existem cinco nodos

# Vectores Modais – Componente $\phi_z$

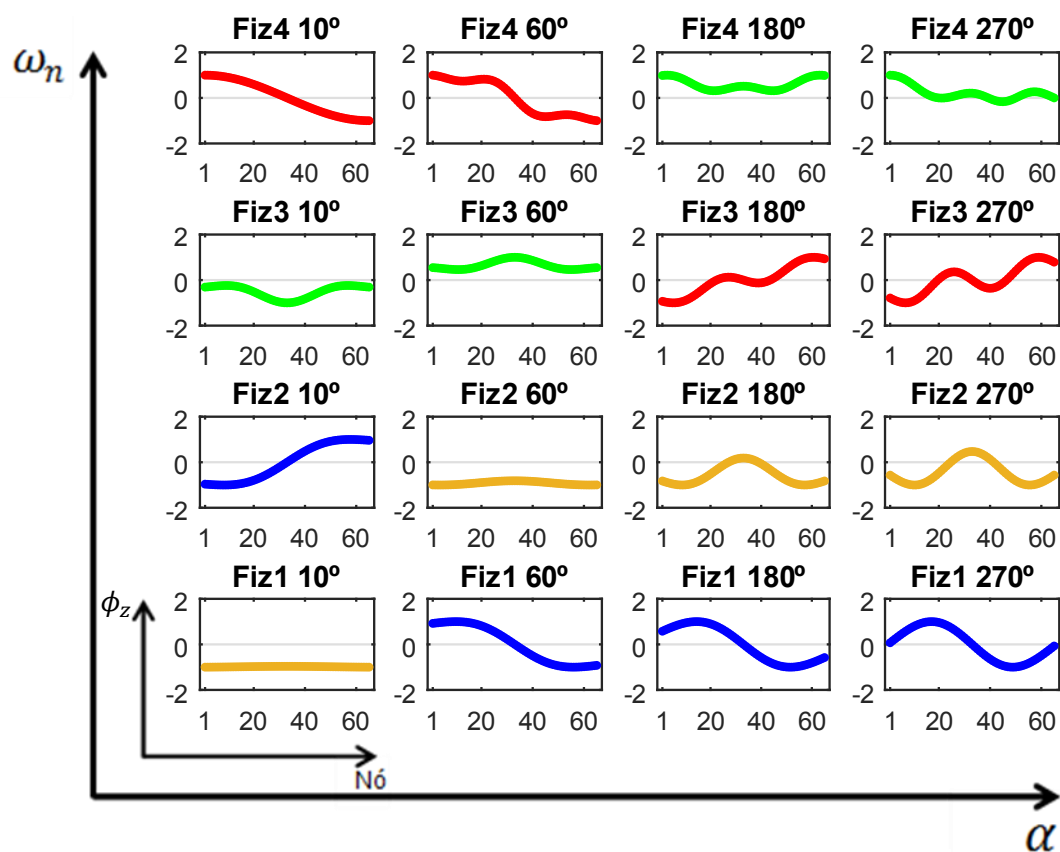
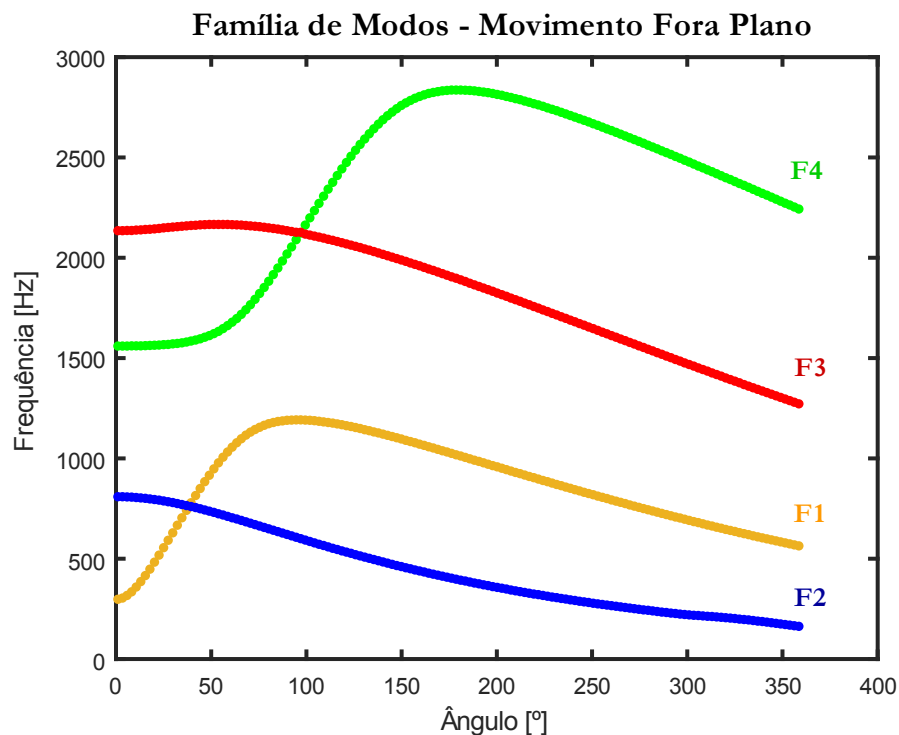
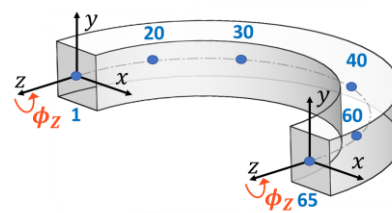


Fig. 34 – Família de Modos-Vectores Modais  $\phi_z$

### **Família de Modos – F1**

Nesta família de modos, para os primeiros ângulos de abertura de  $10^\circ$  e  $60^\circ$  é de notar um comportamento modal semelhante sem a presença de nodos, surgindo apenas 2 nodos nos ângulos de  $180^\circ$  e  $270^\circ$ , não se notando nenhum padrão nos ângulos de abertura antes e após a intersecção com outra família de modos, sendo o comportamento modal geralmente, **simétrico**.

### **Família de Modos – F2**

Nesta família de modos o comportamento modal geral apresenta **assimetria** com um nodo. Após a intersecção com outra família de modos apenas opõe o sinal dos valores na proximidade do único nodo existente.

### **Família de Modos – F4**

Nesta família de modos, é de notar um comportamento modal **simétrico** para os três primeiros valores de ângulo  $10^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $180^\circ$  não se verificando nenhum nodo. Apenas se verifica a existência de nodos no caso de  $270^\circ$  de abertura, manifestando-se subitamente 4 nodos.

### **Família de Modos – F3**

Nesta família de modos o comportamento modal geral apresenta **assimetria** geral, com 1 nodo para o ângulo de  $10^\circ$ . Após a intersecção com outra família de modos, verificam-se 3 nodos para os ângulos de  $180^\circ$   $270^\circ$ .

### **Interpretação:**

Esta componente domovimento tem um comportamento mais particular em relação aos dois anteriores pois não se observa um comportamento que possa ser generalizado para todas as curvas representadas tal como foi feito para as componentes  $v$  e  $\phi_x$  para antes e após os pontos de intersecção.

Nota-se que a presença de nodos é inconstante na medida em que a sua alteração do seu número não pode ser facilmente antecipada assim como a questão da simetria que aparentaria ser regular até ser

verificada a quarta frequência natural do ângulo  $270^\circ$  que repentinamente revela assimetria após três comportamentos simétricos.

## Discussão de Resultados

Esta representação dos modos de acordo com cada uma das componentes ortogonais, permite uma interpretação mais facilitada da deformação em toda a viga nos nós que a constituem, algo que a análise com o método dos elementos finitos, através do software *ANSYS*, possibilita sem a necessidade de recorrer a métodos experimentais, como por exemplo à extensometria, para medir as componentes de rotação e flexão.

Com os resultados obtidos, pode concluir-se que os valores de uma  $n$  ésima frequência natural podem pertencer a famílias de modos para um ângulo de abertura e poderá pertencer a outra família de modos para outro dado valor de ângulo, por exemplo, uma primeira frequência natural poderá pertencer à curva F1 para ângulos abaixo de  $50^\circ$  e poderá pertencer à curva F2 para ângulos superiores a esse valor.

Para as quatro primeiras frequências naturais, é evidente a existência de um padrão de resposta associado a  $v$  e  $\phi_x$  que parece respeitar uma lei de que as curvas de famílias de modos com gradientes positivos numa vizinhança do ponto de intersecção, sofrem a adição de dois nodos após esse ponto, mantendo sempre a sua simetria e que as curvas de gradiente negativo nessa vizinhança mantêm o seu número de nodos assim como a sua simetria.

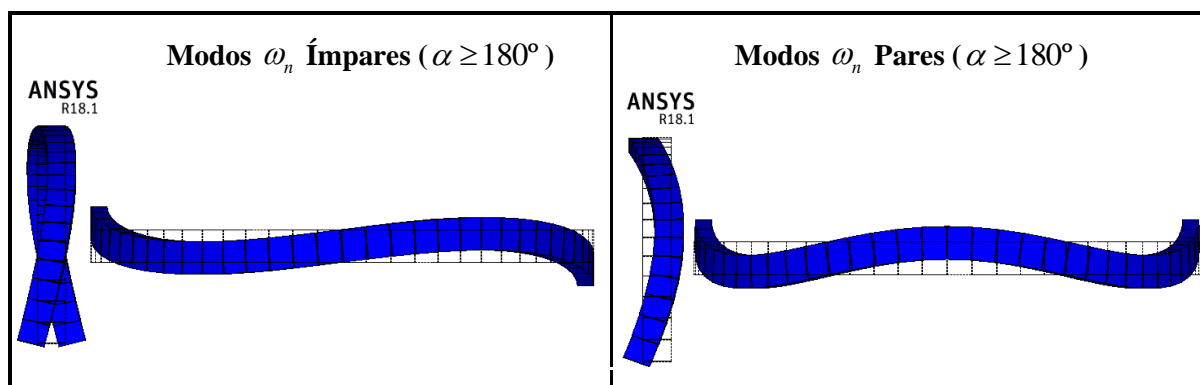
Foi observado que a resposta angular da rotação de secção está associada à resposta em  $v$ , uma vez que esta última resposta se pode associar ao esforço transversal, por consequência existirá momento flector e por consequência, rotação da secção transversal, de forma semelhante ao que acontece com o modelo de viga recta, em que a rotação está associada à flexão da mesma.

Quanto à análise da resposta torsional segundo a componente  $\phi_z$ , era esperado que esta fosse relacionada também com  $v$ , tal como se verificou na resposta da componente da rotação da secção segundo  $\phi_x$ .

Esta resposta segundo  $\phi_z$  tem algumas particularidades em relação às restantes na medida, em que o comportamento modal pode apresentar amplitudes máximas nos extremos da viga, mas curiosamente também para nós interiores, algo que de forma geral não ocorreu segundo as outras componentes, tendo sido a sua amplitude máxima, maioritariamente nos nós extremos.

Uma das grandes observações a fazer, é que no trabalho [8] sobre este tema, uma das conclusões tiradas era de que as frequências naturais para o movimento fora do plano, aumentariam para ângulos de abertura menores. Tendo-se realizado o presente estudo, pode ser demonstrado que a conclusão tirada não se verifica para todo o intervalo angular estudado.

Para o movimento fora do plano, para frequências naturais ímpares, os modos de vibração caracterizam-se pelo movimento de ambas as extremidades segundo  $y$  em sentidos opostos, enquanto que para frequências naturais pares as ditas extremidades movimentam-se no mesmo sentido. Este comportamento ocorre para o ângulo de abertura de  $60^\circ$  ou superior, tal como representado na Fig. 35, para uma viga com o tipo de secção rectangular, assim como a Viga 1 e 2.



**Fig. 35 – Movimento das extremidades para frequências naturais pares ou ímpares**

A questão da aparência dos modos, foi analisada particularmente em cada componente mas agora generalizando, o foco de atenção foi o movimento fora do plano pois, dentro do plano os modos de vibração todos seguiram o padrão da viga recta em que os modos simétricos ocorreram a frequências naturais ímpares de terem modos simétricos em frequências naturais.

### 3.4 Erros no Modelo Computacional e Simulação *M.E.F*

Nesta secção conclui-se que o modelo computacional é muito credível e fiável, havendo sido obtidos resultados de grande precisão com repetibilidade de acordo com os erros calculados entre os resultados gerados através das vias experimentais e de simulação com elementos finitos.

Porém, a sua aplicação de um modelo analítico exacto, num contexto computacional traz consigo erros de cálculo. Sendo um facto que este extenso modelo em subrotinas executa cálculos com baixo custo computacional numa questão de minutos. também é um facto que são induzidos erros de cálculo de operações em operações:

**Erros Modelo Contínuo Factor  $R/h$**  – Apesar deste modelo permitir as mais diversas análises a vigas de diferentes dimensões secções rectangulares e circulares, a sua validade está limitada a pequenas deformações e ao parâmetro  $R/h$  cujo valor se estudou neste trabalho foi de 10 para a Viga 1 e 2 e de 9,6 para a Viga 3. Significando que não é sabido o quão apurado é este modelo para outros valores deste parâmetro, apesar ser válido para vigas, na prática, com raio de curvatura dez vezes superior à espessura radial. Além do parâmetro mencionado, a relação entre altura e largura da secção é uma variável também a ter atenção para uma melhor delimitação do campo de validade do modelo computacional analítico.

**Erros Modelo Computacional Analítico** - Sendo a memória computacional finita isso implicará um armazenamento finito de dados que por consequência leva a perdas de casas decimais ainda que seja utilizada a precisão dupla. Outra fonte de erro relaciona-se com os algoritmos internos dos diversos comandos do *MatLab* relacionados com operações como por exemplo no cálculo de raízes do polinómio característico, na inversão de matrizes, entre outras operações.

**Erros Soluções *MEF*** – As soluções fornecidas pelo método dos elementos finitos conseguem em muitos casos ser praticamente idênticas à exacta mas diferentes da realidade física. Essa diferença, está associada erros de modelação de geometria, de discretização, de formulação e também a erros numéricos. A representação de uma viga com elementos rectos induz um erro relacionado com o modelo da



---

geometria, pois ainda que o número de nós seja imenso, sempre se tratará de uma aproximação de curva, erro esse que estará presente na representação da secção circular da Viga 3. O facto de um modelo de elementos finitos ter um número limitado de nós, condiciona consequentemente o número de graus de liberdade da viga induzindo também erros de discretização. Por último, a perda de informação relacionada com a precisão finita computacional origina erros numéricos de truncatura.



---

# Capítulo 4

## Conclusões e Trabalhos Futuros

Neste Capítulo irão ser apresentadas as conclusões globais a tirar do estudo realizado na elaboração do Modelo Computacional fazendo-se a avaliação geral dos resultados obtidos. Serão focadas as principais vantagens do estudo computacional terminando, finalmente, com os temas que podem ser explorados após o presente desenvolvimento.

### 4.1 Conclusões

Inicialmente a presença de algum receio na programação era constante, devido à complexidade da teoria mas houve um grande suporte matemático-analítico de orientação e do trabalho que anteriormente fora desenvolvido e as funcionalidades do *MatLab* foram sendo apuradas no desenrolar do trabalho.

O presente trabalho deu satisfação em ser realizado no sentido de ter sido dado um contributo científico útil e concreto no uso de estudos, cujos resultados coincidem não só com a via experimental, mas também com a via numérica de simulação, argumentos esses que darão a segurança a quem o utilizar futuramente.

O forte investimento na complexa programação computacional deste modelo analítico resultou num programa de fácil utilização na medida em que o utilizador pode ter uma representação gráfica da resposta em frequência e pode também ter acesso aos valores das quatro primeiras frequências naturais de uma viga curva, para vários ângulos de abertura. Apenas precisa preencher um ficheiro *TXT* todo ele descrito de forma detalhada não requerendo conhecimentos avançados sobre a teoria das vigas curvas nem de programação.

Como foi observado, com este modelo computacional podemos obter resultados com rigor no âmbito da engenharia, porém, o seu campo de validade não está perfeitamente definido, nomeadamente quanto ao rácio  $R/h$ , pois é sabido que para valores elevados deste rácio surge a tendência do aparecimento de erros numéricos concretamente na inversão das matrizes (problemas de singularidade). É preciso, portanto, fazer uma avaliação da gama de valores de  $R/h$  para a qual os resultados são perfeitamente confiáveis (como o exemplo da Viga 3). Outro problema que pode surgir como foi visto em

secções anteriores é o de desvios de valores para frequências naturais mais elevadas quando o raio de curvatura da viga é exageradamente superior à espessura radial da viga. Este problema não gera uma preocupação urgente, dado que problemas desta natureza apenas surgiram para frequências que ultrapassaram os 2000  $Hz$  para o movimento fora do plano, acreditando-se que uma boa “afinação” do parâmetro  $R/h$  pode dar os resultados ideais até uma quarta ressonância como foi verificado.

O presente trabalho demonstrou o êxito conseguido em obter um modelo computacional para análise dinâmica de vigas curvas sujeitas a vibrações forçadas onde além de garantir a típica  $FRF$  de uma viga curva, garante um estudo (Tipo 2) que permite saber qual a influência de curvatura no comportamento da viga, o que na prática pode servir de guia para uma curvatura desejada de uma viga, de acordo com a preferência de certos valores de frequências naturais uma vez que a manipulação destes valores pela alteração da secção geométrica se torna mais complexo industrialmente.

Foi desenvolvido um código genérico em *APDL* deixando este caminho livre para investigadores que o queiram explorar com novas análises dinâmicas de vigas curvas o que foi pensado para aplicação geral de novos casos de estudo, direccionando-se este tema para a recente área computacional tirando-se o máximo partido da aliança entre o estudo humano e o computador.

É um facto que a simulação é uma ferramenta bastante poderosa, capaz de reproduzir eficientemente resultados rigorosamente precisos e facilmente adaptáveis às mais diversas e complexas situações em estudo. A simulação via numérica pode ser tomada no lugar da via experimental na medida que pode ser um guia de confirmação de resultados que dispensa as componentes físicas de ensaio mas nunca tomando o lugar de condição suficiente ao que realmente é a experimentação. O que é importante realçar é de que foi aberta uma outra via de estudo que é a simulação numérica, além das vias típicas analíticas e experimentais.

Será pertinente o leitor sentir-se de certa forma interrogado ao porquê de ser desenvolvido um longo e extenso (mas simples) modelo computacional, uma vez existirem simuladores de elementos finitos com resultados precisos, tal como o *ANSYS*. Em resposta a essa interrogação, é importante deixar claro que foi desenvolvido um código unicamente especializado para vigas curvas que, mais importante ainda, que parte da dedução analítica, sendo a resposta Receptância (à frequência escolhida) a solução exacta das equações de equilíbrio, ao contrário do que são os métodos aproximados. A outra mensagem a transmitir é de além da simples introdução de dados, é possível focar o estudo em dois movimentos em separado assim como estudar as curvas das famílias de modos ao ser possível variar o seu ângulo de abertura, surgindo assim um grande leque de informação.

Em suma o estudo foi bem sucedido, na medida em que os programas desenvolvidos abriram um novo caminho de estudo que é o da simulação numérica emergindo assim uma imensidade de novos temas a explorar para o aprofundamento desta área das vigas curvas.

## 4.2 Sugestões para Trabalhos Futuros

O trabalho de investigação foi finalizado parcialmente pois com a abertura do caminho de análise dinâmica computacional de vigas curvas, muitos progressos podem ser feitos. Foi visto que os alicerces que suportam o código desenvolvido, são bem sólidos havendo possibilidade levar o estudo deste interessante tema das vigas curvas para patamares mais altos seguindo-se nesse sentido, como sugestão os seguintes temas para futuros trabalhos de estudo:

**Campo de Validade do Modelo Computacional** – Neste tópico seria ideal um estudo de delimitação do campo de validade do modelo desenvolvido pois a sua aplicação tem desvios maiores ou menores consoante a relação das medidas de secção com o raio de curvatura. Desta forma, seria ideal um tema de testes unicamente experimentais com diversos exemplos de vigas curvas planas variando-se parâmetros e relações das medidas de secção estudando-se o seu erro e identificando-se as variáveis das quais ele depende.

**Estruturas compostas por Vigas Curvas** – desenvolvimento de um estudo dinâmico estrutural aplicado a uma estrutura composta apenas e unicamente por vigas do tipo curva, fazendo-se uma assemblagem de vários modelos contínuos, aplicando-se esse estudo a estruturas planares ou a estruturas tridimensionais no espaço.

**Aplicação do Amortecimento Estrutural** – O presente modelo computacional desenvolvido cujo modelo analítico o suporta, tem resultados relativamente precisos, sendo um facto também que está isento do efeito de amortecimento estrutural. Portanto como melhoria do modelo, sugere-se a contabilização dessa energia dissipativa no modelo analítico, o estudo da sua influência em diferentes vigas e posteriormente a sua adaptação no modelo computacional.

## Bibliografia

- [1] V. H. R. Hoppe, “Vibrationen eines Ringes in seiner Ebene,” pp. 158-170, 1871.
- [2] A. E. H. Love, “A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity”, Dover Publications, 1944.
- [3] Seidel, B. S. and E. A. Erdélyi, “On the vibrations of a thick ring in its own plane” *Journal of Engineering for Industry*, pp. 240-244, 1964.
- [4] Rao S. S. and V. Sundararajan, “In plane flexural vibrations of circular rings” *ASME Journal of Applied Mechanics*, pp. 620-625, 1969.
- [5] Timoshenko S. and D. H. Young and W. Weaver, “Vibrations Problems in Engineering”, John Wiley & Sons, 1974.
- [6] Wang T. M. and A. Lasky and M. Ahmad, “Natural Frequencies for out-of-plane Vibrations of Continuous Curved Beams” *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 20, No 3, pp. 257-263, 1984.
- [7] A. P. V. Urgueira, “Análise Dinâmica de Vigas Curvas – Desenvolvimento de um Modelo Analítico,” Instituto Superior Técnico, Lisboa, Portugal, 1985.
- [8] Montalvão e Silva, J. M. and A. P. V. Urgueira, “Out of Plane Dynamic Response of Curved Beams – An Analytical Model,” *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 24, No. 3, pp. 271-284, 1988.
- [9] Tufekçi, E. and A. Arpacı, "Exact Solution of In-Plane Vibrations of Circular Arches with Account Taken of Axial Extension, Transverse Shear and Rotatory Inertia Effects," *Journal of Sound and Vibration*, 209(5), 845-856, 1998.
- [10] Tufekçi, E. and O. Y. Dogruer, “Exact Solution of Out Of Plane Free Vibrations of a Circular Beam with Uniform Cross Section,” Faculty of Mechanical Engineering Istanbul Technical University, Istanbul, Turkey, 2002.
- [11] Tufekçi, E., T. Bostancı, O. Ozdemirci, and O. Oldac, “Experimental Verification of Numerical and Analytical Solutions of Free Vibrations of Curved Beams,” Faculty of Mechanical Engineering Istanbul Technical University, Istanbul, Turkey, 2006.

As imagens do documento foram criadas com recurso aos softwares *Microsoft Office*, *SolidWorks*, *Smartdraw*, *MatLab* e *Ansys*.